Matematik Öğretmeni Adaylarının Ardışık Tek Sayıların Toplamının İspatına Yönelik Model Oluşturma Becerilerinin İncelenmesi[1]

Gürsel Güler[2] ve Ahmet Temizyürek[3]

Öz: Bu çalışmada, orta öğretim matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin araştırılması amaçlanmıştır. Nitel araştırma yaklaşımlarından mevcut durumu yansıtmayı amaçlayan durum çalışması yönteminin esas alındığı çalışmanın verileri sınıf ortamında gerçekleştirilen odak grup görüşmesi yardımıyla toplanmıştır. Çalışma pedagojik formasyon eğitimi programına devam eden yirmi matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Gönüllük esasına göre seçilen yirmi öğretmen adayı ile yapılan odak grup görüşmesi kaydedilmiş ve daha sonra yazıya dökülerek betimsel olarak analiz edilmiştir. Araştırmada elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatında sözel, cebirsel ve şekilsel olmak üzere üç farklı model türü kullandıkları ve bu modeller doğrultusunda altı farklı ispat oluşturdukları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Matematik öğretmeni adayı, ispat, ardışık sayılar, model

DOI: 10.16949/turcomat.63535

Abstract: This study aims to look into secondary education prospective mathematics teachers' model creation skills regarding proof of the rule providing the sum of successive odd numbers. The study takes case study method, a qualitative research approach, as the basis to reflect the current situation, and focus group discussions were held in classroom environment to collect data. The study was conducted on twenty prospective math teachers studying pedagogical formation. Focus group discussions held with twenty prospective teachers selected on voluntary basis voluntarily were recorded, put on paper and analyzed descriptively. According to the results derived from the study, it is observed that the prospective teachers used verbal, algebraic and formal models as three model types during the proof of the rule providing the sum of successive odd numbers and created six different proofs along with these models.

Keywords: Prospective mathematics teachers, proof, successive numbers, model

See Extended Abstract

1. Giriş

Matematik eğitiminin en önemli hedeflerinden birisi öğrencilerin öğrenecekleri kavramlarla ilgili neden, niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmelerini sağlayabilmektir. Öğrencilerin kavram oluşturma süreçlerindeki bu sorgulamalar ise matematiksel ispat ve muhakeme yeteneklerinin gelişimine bağlıdır. Çünkü matematiksel ispat, matematik eğitiminin merkezinde olup (Almeida, 2003) iletişim kurma, ilişkileri açığa çıkarma, tahminler yapma, kavramları ilişkilendirme, ifadeleri doğrulama ve yeni bilgileri genellemeyi içerir (Harel & Sowder, 1998; Schabel, 2005). Bu özelliklerinden dolayı birçok çalışmada matematik öğretimi için matematiksel ispatın kullanılması gerektiği (Knuth, 2002) ve ispat kullanımının giderek artan bir öneme sahip olduğu (Reiss, Heinze & Klieme, 2002) vurgulanmıştır. Ayrıca araştırmacılar tarafından ispatın

[1] Bu çalışmanın bir kısmı XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde bildiri olarak sunulmuştur.

[2] Yrd. Doç. Dr., Bozok Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, gursel.guler@bozok.edu.tr
[3] Prof. Dr., Bozok Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, ahmet.temizyurek@bozok.edu.tr

matematik öğretimi açısından anlamı ve fonksiyonları belirlenmiştir. Stylianides ve Stylianides (2009) ispatı matematik toplulukları tarafından kabul edilebilir, genel, geçerli ve doğru bir ifade elde etmek olarak nitelendirmektedirler. Weber (2005) ise ispatı, ispatı yapan kişi tarafından sunulan bazı varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önemli bilgilerin kullanıldığı matematiksel bir çalışma ve önceki teoremler, kabul edilen gerçekler yoluyla oluşturulan çıkarımsal kuralların uygulanması ile arzu edilen sonuçların çıkarımıdır şeklinde tanımlamıştır.

Matematiksel ispat, matematiğin vazgeçilmez bir parçası olarak nitelendirilmesine rağmen öğretim programlarında ispatın rolü ve önemi üzerinde durulmamış (Reiss, Heinze & Klieme, 2002) ve matematikçiler açısından genellikle matematiksel ifadelerin doğrulanması için yeterli kanıtın gösterilmesi olarak algılanmıştır. (Mudaly & De Villiers, 2004). Bu yüzden özellikle ileri seviyedeki matematik derslerinde matematiksel kavramlar tanıtılmaktadır ve bu kavramlara ait matematiksel önermelerin ispatları üzerine odaklanılmaktadır (Weber, 2001). Dolayısıyla yapılan araştırmalarda, farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören öğrencilerin neden ispat yaptıklarını anlamadıkları ve derslerden geçmek için ezberlenmesi gerektiği algısına sahip oldukları sonuçları ortaya çıkmaktadır (Güler ve Dikici, 2012; İskenderoğlu, 2010; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Ancak 2000'li yıllardan itibaren özellikle Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin (NCTM) standartlarına bakıldığında, öğrencilerin zihinsel gelişimleri için "muhakeme ve ispat" üzerinde önemle durulması gerektiğine vurgu yapılmaktadır (NCTM, 2000). Bununla birlikte ülkemizde de öğretim programlarının yeniden yapılandırılması ile birlikte ispatın eğitim-öğretimdeki önemi giderek artmaktadır. Çünkü ülkemizde öğretim programlarını yeniden yapılandırma çalışmalarının sonucunda oluşturulan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında, Matematiksel Süreç Becerileri içerisinde matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme becerilerinin yer aldığı görülmektedir (MEB, 2013).

Yenilenen Ortaöğretim Matematik Dersi Programı, öğrencilerin matematik öğrenme süreçlerinde temel matematiksel kavramları kazanmalarından çok daha fazlasını içermektedir. Bu yüzden matematiksel düşünme, problem çözme, matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma, ilişkilendirme, matematiği bir iletişim dili olarak kullanabilme ve modelleme becerileri matematik öğrenme ve yapma süreçlerinin temel elemanlarıdır (MEB, 2013). Bunun yanı sıra ispatın matematik öğretim sürecinin her düzeyine yayılması gerektiği ve okullardaki matematik etkinliklerinin bir parçası olarak problem çözme ve ispat uygulamalarına yer verilmesine vurgu yapılmaktadır (NCTM, 2000). Öğrencilerin problem çözme yeteneklerinin gelişmesi için ise öğretim programlarında matematiksel ispatın bir araç olarak kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır (Knuth, 2002). Çünkü ispat öğrencilerin matematiksel kavramları nedenleri ile öğrenmelerine yardımcı olacak üst biliş faaliyetleri içermektedir. Bu bağlamda öğretim programları içerisinde yer alan beceriler ve standartlar arasındaki ilişkileri oluşturmak önem kazanmaktadır.

Öğrencilerin matematiksel problem çözme ve ispat yapma yaklaşımları arasındaki ilişki yapılan çalışmalarla ortaya konulmuş (Tall, 1991; Weber, 2005) ve matematiksel ispat ile problem çözme arasında yakın bir ilişki olduğu görülmüştür (Weber, 2004). Matematik araştırmacıları için ispat yapma hipotezlerin formüle edildiği, test edildiği karmaşık ve sistemli bir problem çözme aktivitesidir (Shipley, 1999). Rutin olmayan problemlerin çözümleri bir ilişki, düzen veya örüntünün açıklanmasını gerektirdiğinden öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen veya örüntü arama eğilimini arttırır, ispat fikrini geliştirir (Altun, 2005). Ancak matematiksel modelleme ile matematiksel ispat arasında sınırlı bir ilişki kurulabilmektedir. Çünkü gerçek yaşam problemlerinin matematiksel modellenmesi ile ispat yapma arasında sınırlı bir ilişki vardır (Mudaly & De Villiers, 2004). Bununla birlikte matematik öğrenme ve öğretmede modelleme yaklaşımı, bir probleme çözüm bulunmasından çok, genellenebilir ve yeniden kullanılabilir bir ilişkiler sistemi oluşturmaktadır (Doerr & English, 2003). Bu yaklaşımda daha çok örüntü ve ilişkileri keşfedecek modellerin geliştirilmesi ve bunların başka problemlerin çözümünde de kullanılabilmesi amaçlanmaktadır (Olkun, Şahin, Akkurt, Dikkartın ve Gülbağcı, 2009). Dolayısıyla gerçek yaşam problemlerinin çözümü ile ispat arasındaki ilişkiyi kurmak zor görünmesine rağmen ispat yapma süreci içerisinde gerçek yaşam problemlerinin çözümünün değeri hafife alınmayacak kadar açıktır (Hodgson & Riley, 2001). Bu yüzden matematiksel ispat ile modelleme arasında da bir ilişki kurulabilir (Mudaly & De Villiers, 2004). Aslında hem modelleme hem de ispat yapma süreçleri arasında birbirini tamamlayıcı bir ilişki vardır (Hanna & Jahnke, 2004; Hodgson & Riley, 2001; Mudaly & De Villiers, 2004). Çünkü öğrenciler ispat ve modelleme süreçlerinde benzer döngüsel aktiviteler gerçekleştirmektedirler (Hanna & Jahnke, 2004). Dolayısıyla modelleme süreci sonunda oluşturulan görsel temsil ve modellerin ispatlarda yol gösterici olduğu ve öğrencilerin ispat yeteneklerini geliştirdiği görülmektedir (Gabriel Stylianides, 2007). Bununla birlikte matematik öğretiminde kullanılan görsel temsil ve modellerin ispat oluşturmaya potansiyel katkıları yapılan çalışmalarla (Davis, 1993; Hanna & Sidoli, 2007) ortaya çıkarılmasına rağmen özellikle başarılı görsel temsil ve modellerle oluşturulabilen ispatlar sınırlıdır. Bu yüzden araştırmacıların bir kısmı bu tip ispatların yapılan ispatları daha ileri seviyelere taşıyabileceğini, diğer bir kısmı ise formel bir ispatın yerini tutamayacağını savunmaktadır (Hanna & Sidoli, 2007).

Matematik derslerinde bir kavramın, bir teoremin veya bir ifadenin öğrencilere doğrudan verilmesi bu kavramların, teoremlerin veya ifadelerin öğrenilmesini ve içselleştirilmesini zorlaştırmaktadır (Çiltaş ve Yılmaz, 2013). Bu yüzden öğrencilerin ispatları anlamlı bir şekilde öğrenebilmeleri için matematiksel modellerden yararlanmalarının faydalı olacağı düşünülmektedir. Bu konuda Ortaöğretim Matematik Dersi Programında tümevarım ile ilgili olarak ardışık sayıların öğretiminde kullanılması önerilen etkinlik örnekleri bulunmaktadır. Bu etkinliklerde ardışık sayıların toplamını veren kuralların modeller yardımıyla öğretilmesi üzerinde durulmakta ve örnek modeller tanıtılmaktadır (MEB, 2011). Bu bağlamda yakın gelecekte sınıf içi etkinliklere yön verecek öğretmen adaylarının öğretim programının işaret ettiği örnek modelleri ve farklı modelleri kullanarak ispat yapabilme becerilerinin belirlenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü yapılan araştırmalar, öğretmenlerin öğrencilerine ispat becerisi kazandırma süreçlerinde, ispata ilişkin algı ve deneyimlerinin etkili olduğunu göstermektedir (Almeida, 2000; Furinghetti & Morselli, 2009). Bu yüzden çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarına ardışık sayıların toplamını veren kuralın modellerle ispatları tanıtılmış ve adayların ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin araştırılması amaçlanmıştır.

2. Yöntem

Bu araştırma orta öğretim matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi ve eğer varsa bu süreçte ortaya çıkan güçlüklerin belirlenerek nedenlerinin ortaya konulması amacıyla yapılan nitel bir araştırmadır. Araştırmada desen olarak bir grup veya olayı derinlemesine inceleme imkanı sunan bütüncül tek durum çalışması kullanılmıştır. Çünkü durum çalışmalarında, araştırılan durum hakkında zengin bir şekilde açıklayıcı bilgiler sunmak için derin ve çeşitli bilgi kaynaklarından beslenerek katılımcıların açıklamaları, görüşmeler ve diğer veri kaynaklarından elde edilen bilgiler birleştirilip çalışılan durum hakkında karar verilir (Kaleli-Yılmaz, 2014).

2.1. Katılımcılar

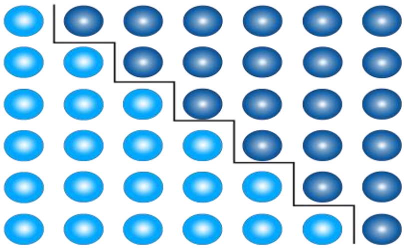
Araştırma Karadeniz bölgesinde bulunan bir üniversitenin pedagojik formasyon eğitimi sertifika programına devam eden öğretmen adaylarından, 2013-2014 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Özel Öğretim Yöntemleri dersini alan 52 öğrenciyi kapsamaktadır. Bu ders kapsamında öğretmen adayları matematik özel öğretim yöntemleri, bu yöntemlere yönelik etkinlik örnekleri, Ortaöğretim Matematik Dersi Programı ve programda yer alan beş temel becerinin incelenmesi ve geliştirilmesi üzerinde bireysel ve grup çalışmaları yapmışlardır. Bu süreçte özellikle modelleme ve ispat becerileri üzerine odaklanılarak bu becerilerin geliştirilmesi ve aralarında bir ilişki kurulabilmesi için etkinlikler yapılmıştır. Bu etkinlikler içerisinde ardışık sayıların toplamını veren kuralın ispatı için modeller oluşturulması da yer almaktadır. Bunun için ardışık sayıların toplamını ve günlük yaşam durumlarını içeren “Abaküs Problemi” araştırmacılar tarafından oluşturularak ispatında kullanılabilecek modeller öğretmen adaylarına tanıtılmıştır. Aşağıda “Abaküs Problemi” için öğretmen adaylarına gösterilen şekilsel ve cebirsel modellerden örnekler sunulmuştur.

Model 1 (Gauss Yöntemi): Cebirsel olarak sunulan model örneği;

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{1+2+3+4+\cdots+}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{n}\mathbf{+(}\boldsymbol{n}\mathbf{-1)+\cdots+1)}\\ \hline \mathbf{(}\boldsymbol{n}\mathbf{+1)+(}\boldsymbol{n}\mathbf{+1)+\cdots+(}\boldsymbol{n}\mathbf{+1)}\end{array}\right\} = \boldsymbol{n}.\,(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$$

olur. Burada elde edilen sonuç aynı toplamın iki defa yazılması sonucu elde edildiğine göre; $\mathbf{1+2+3+4+\cdots+}\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$ olur.

Model 2: Ardışık sayıların toplamı için şekilsel olarak sunulan bu modelde dikdörtgen ve alan modellerinden yararlanılmıştır.



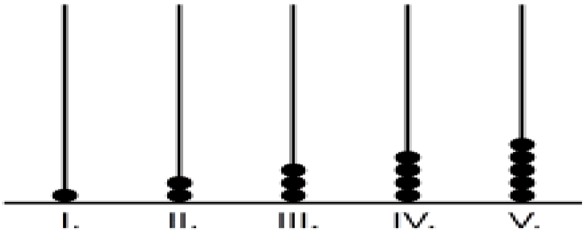
Şekil 1. Abaküs probleminin çözümüne yönelik şekilsel model örneği (Nelsen, 1993)

Araştırmanın verileri, 52 öğretmen adayı içerisinden gönüllülük esasına göre belirlenen 20 adayın katıldığı odak grup görüşmesi ile elde edilmiştir. Odak grup görüşmesine katılan öğretmen adaylarının 12’si kadın, 8’i ise erkektir. Ayrıca araştırmaya katılan öğretmen adaylarına yapılan çalışma hakkında bilgi verilerek gerçek isimlerinin gizli tutulacağı belirtilmiştir. Araştırmaya katılan adaylara, öğretmen adayını simgeleyen ÖA1, ÖA2,…, ÖA20 şeklinde kodlar verilmiştir.

2.2. Veri Toplama ve Analizi

Araştırmanın verileri Özel Öğretim Yöntemleri dersinin son haftası sınıf ortamında gerçekleştirilen odak grup görüşmesi sonucunda elde edilmiştir. Odak grup görüşmesinde öğretmen adaylarına ardışık sayılar için oluşturulan “Abaküs Problemi” nin ardışık tek sayılar için revize edilen şekli sunulmuştur. Adaylardan bu problemde yer alan ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın modeller yardımıyla ispatlarını oluşturmaları ve paylaşmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının problemi net bir şekilde görebilmeleri için odak grup görüşmesi süresince “Abaküs Problemi” projeksiyon cihazı ile yansıtılmıştır. Problemin çözümüne yönelik adaylar tarafından bireysel olarak oluşturulan model ve ispatlar tahtaya yazılarak araştırmaya katılan her bir adayın fikirleri alınmaya çalışılmıştır. Bu sayede adayların oluşturdukları her model ve ispatın tartışılarak doğruluklarına diğer adayların ikna edilmesi için argümanlar üretilmesi sağlanmıştır. Bununla birlikte her aday problem için kendilerine dağıtılan kağıtlar üzerinde de çalışmışlardır. Veri toplama amacıyla kullanılan problem aşağıda sunulmuştur.

Aşağıda, yeterince uzun beş çubuktan oluşan bir abaküs örneği verilmiştir. Abaküste; sırasıyla I. çubukta 1 adet, II. çubukta 2 adet ve benzer biçimde diğer çubuklara da numarası kadar boncuk takılıyor. Buna göre 50. çubuğa gelindiğinde toplam kaç tane boncuk kullanılması gerekir?



Şekil 2. Abaküs problemi

Odak grup çalışmasındaki amaç, bireysel görüşmelerde akla gelmeyecek bazı konuların grup görüşmelerinde diğer bireylerin açıklamaları çerçevesinde akla gelebilmesi ve ek yorumların oluşturulabilmesidir (Eraslan, 2012). Öğretmen adayları ile gerçekleştirilen odak grup görüşmesi 50 dakika sürmüştür. Görüşmenin tamamı kamera ile kayıt altına alınmıştır. Daha sonra elde edilen veriler çözümlenmiş ve adaylar tarafından oluşturulan yazılı dökümanlarla birlikte nitel betimsel analiz tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Analiz sürecinde iki farklı araştırmacı eş zamanlı ve birbirinden bağımsız olarak öğretmen adaylarının yanıtlarını incelemişlerdir. Öğretmen adaylarının oluşturdukları 6 modelin geçerliliği üzerinde araştırmacılar fikir birliğine varmışlardır. Verilerin tutarlılığını artırmak için ise analiz sürecinde adaylar tarafından oluşturulan modeller ve ortaya çıkan söylemler doğrudan alıntılar kullanılarak sunulmuştur.

3. Bulgular

Çalışmanın bu kısmında odak grup görüşmesi sonucunda öğretmen adayları tarafından oluşturulan sözel, cebirsel ve şekilsel model türleri içerisinde yer alan 6 farklı durum ve bu süreçte ortaya çıkan söylemler meydana geldiği sırada sunulmuştur.

3.1. Model Oluşturma Süreçleri

Öğretmen adayları ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatında ilk olarak kare ve alan modellerinden yararlanarak şekilsel bir model oluşturmuşlardır. ÖA1 ardışık tek sayılar için I. adımda bir, ikinci adımda üç ve daha sonrada beş kareyi birbiri etrafında çizerek yine bir kare elde edilebileceğini ve bu son elde edilen karenin alanının ardışık tek sayıların toplamına eşit olacağını belirtmiştir. Aşağıda ÖA1 tarafından oluşturulan model ve diğer öğretmen adaylarının bu süreçteki söylemleri sunulmuştur.

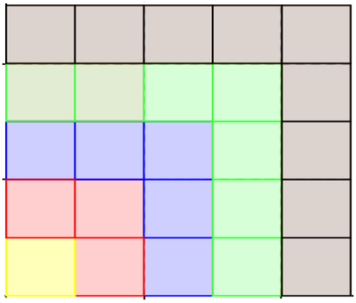
ÖA1: Şu şekilde olabilir… Bir tane kare çizebiliriz, onun etrafına 3 tane kare çizebiliriz, daha sonra onunda etrafina 5 tane kare çizebiliriz… Bu şekilde devam edildiğinde n^2 *gelmez mi acaba…*

Mülakatçı: Arkadaşınızın fikri için ne diyorsunuz? Bu fikir geçerli bir model oluşturabilir mi? Tartışalım…

ÖA3: Ben tam olarak anlayamadım arkadaşımızın fikrini…

ÖA4: Söylediklerinizi çizebilir misiniz? O şekilde ne söylediğini daha net görebiliriz…

ÖA1: Evet çizebilirim… [ÖA1 arkadaşlarına ifade ettiği geometrik modeli çiziyor]



Şekil 3. ÖA1 tarafından oluşturulan model

ÖA4: İçten dışa doğru 1, 2, 3,…, diye sıralandığı için bir kare oluyor evet…

ÖA3: Evet demek ki bu yol doğru olur… Her biri için doğru oluyor…

ÖA2: Bence tahta da göstermek daha mantıklı olabilir… Bu şekilde daha net görebiliriz…

Mülakatçı: Tamam o şekilde yapalım… Fikri olan arkadaşımız tahtada izah etsin, üzerine tartışalım…

ÖA1: $n = 1$ *için 1 tane,* $n = 2$ *için 3 tane,* $n = 3$ *için 5 tane ve* $n = 4$ *için 7 kare birbiri etrafına çizilerek büyük bir kare elde edilebilir. Buradan da* $n = 4$ *olduğu için kenar uzunluğu 4 olur. Buradan da küçük karelerin sayısı* $n^2 = 4^2 = 16$ *elde edilir…*

ÖA4: Evet bu şekilde çok güzel görülüyor ispat…

Öğretmen adaylarının oluşturdukları ikinci ispat modeli ise; özel öğretim yöntemleri dersinde birinci yazar tarafından ardışık sayıların toplamı için gösterilen ve *Gauss Yöntemi* olarak isimlendirilen ispatın ardışık tek sayıların toplamı için uygulanmış şeklidir. Bu modelde adaylar hem sözel hem de cebirsel modeller kullanmışlardır. Bu model ÖA5 tarafından oluşturulmuştur ve diğer öğretmen adaylarının tamamı ispatın doğruluğu noktasında birleşmişlerdir.

ÖA5: Toplamı tersten yazabiliriz, yani Gauss yöntemi olabilir…

Mülakatçı: Bakalım… Söylediklerinizi tahtada yazabilir misiniz?

ÖA5: Şöyle… $\frac{\substack{1+3+5+\cdots+(2n-1) \\ (2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+1}}{2n+2n+2n+\cdots+2n=n.2n}$ *olur. Bu ifade elde etmek istediğimiz toplamın iki katı olduğu için* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n.2n}{2} = n^2$ *olur.*

Mülakatçı: Evet arkadaşlar yapılan ispatta bir hata var mı?

Adayların tamamı: Yok… Doğru…

Üçüncü model örneği ÖA6 tarafından ortaya atılmıştır. ÖA6 ardışık tek sayılar dizisi içerisinde yer alan terimlerin karşılıklarını kareler yardımıyla modellemiştir. Öğretmen adayı bu modelde ilk olarak sözel devamında ise şekilsel bir model oluşturmuştur. Fakat oluşturduğu modelin sadece terimlerin karşılığı için geçerli olduğu ve terimlerin toplamını vermediği diğer adaylar tarafından fark edilmiştir. Öğretmen adaylarının katkılarıyla birinci modelin bir benzeri oluşturulmuştur. Sonuçta ulaşılan model ilk modelle benzerlik göstermesine rağmen modellerin oluşturulma süreçlerinin oldukça farklı olduğu görülmüştür.

ÖA6: Bence burada alt alta 1, 3, 5… şeklinde kareler çizilerek yapılabilir… [Tahtada çiziyor]... Bu şekilde kareleri çizdiğimizde toplam n^2 tane karemiz olur. Burada n tane satır elde ettiğimizde toplamı elde ederiz.

ÖA3: Bir dakika nasıl n tane olursa n^2 oluyor…

ÖA1: Burada bir kare elde edemedik ki neden toplam n^2 olsun…

ÖA6: Ardışık tek sayıların toplamı… Birinci satırda 1 tane, ikinci satırda 3 tane, üçüncü satırda 5 tane… Bu şekilde devam eder ve sonuçta da toplam n^2 olur…

ÖA5: Burada n^2 nereden geldi, onu anlayamadım…

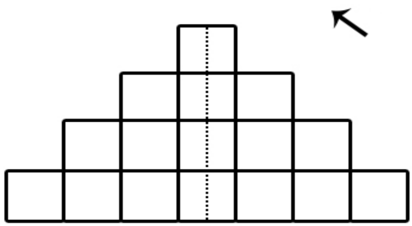
ÖA7: Evet arkadaşımızın yaptığından görülüyor… Birinci adımda 1, ikinci adımda 4, üçüncü adımda 9… Bu şekilde terim sayısının karesi olduğu görülüyor… Yani karelerin sayılarını topladığımızda terim sayısının karesiyle aynı oluyor.

ÖA4: Ama bence arkadaşımızın yaptığı çok net bir model değil… Bence bu gösterim ardışık tek sayıların toplamının n^2 olduğunu bildiğimiz için doğru gibi görünüyor. Bu şekilde net değil…

ÖA1: Şöyle bir şey yapılabilir… Arkadaşımızın yaptığı modeli tam ortadan dikey olarak ikiye bölsek ve bunu tam simetrik olarak katladığımızda n^2 yi elde edebiliriz. Bu şekilde de ilk yaptığımız ispata benzeyeceği için toplamın n^2 olduğu görülür.

Mülakatçı: Bu söylediklerimizi gösterebilir miyiz?

ÖA1: [Söylediği ifadeleri tahtada çizerek gösteriyor]... Bu şekilde ikiye böldüğümüzde ve uygun şekilde katladığımızda bir kare elde edeceğimiz için yine toplam formülünü elde ederiz…



Şekil 4. ÖA6 tarafından oluşturulan modelin son şekli

ÖA4: Katladığımızda bir kare olmaz… Ama o parçayı çıkarıp eksik kısma uygun bir biçimde yerleştirirsek kare olur…

ÖA1: Evet parçaları uygun bir şekilde birbiri üzerine yerleştirdiğimizde ilk oluşturduğumuz şekil oluşuyor.

ÖA5: Bana göre çok net değil ama zorladığımızda bir model çıkıyor…

Araştırmada ortaya çıkan dördüncü ispat modeli ÖA8 tarafından cebirsel olarak oluşturulmuştur. Öğretmen adayının bu modelde önceki bilgilerinden hareketle farklı iki ardışık sayı dizisi kullanarak ardışık tek sayıların toplamına ulaştığı görülmektedir. ÖA8 oluşturduğu modelin geçerliliğine diğer adayları ikna etmekte zorlanmasına rağmen yaptığı açıklamalar sonucunda ispatının kabul edildiği görülmüştür.

ÖA8: Ben ardışık tek sayıları parçalayıp sonra da ardışık sayıların toplam kuralını kullanarak ispatı oluşturdum. [Tahtaya ifadelerini yazıyor]… $\dfrac{\begin{matrix}1+2+3+4+\cdots+n\\0+1+2+3\ldots+(n-1)\end{matrix}}{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}$ *… Şimdi ilk iki satırı ayrı ayrı ispat edip topladığımda* $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ *olması gerekiyor. Ardışık sayıların toplamının kuralını zaten biliyoruz… Yani birinci ifade* $\frac{n.(n+1)}{2}$ *dir ve ikinci ifade de yine* $\frac{n.(n-1)}{2}$ *olur. Bu iki ifadeyi topladığımızda…*
$\frac{n.(n+1)}{2}+\frac{n.(n-1)}{2}=\frac{n}{2}(n+1+n-1)=\frac{n.2n}{2}=n^2$ *olur.*

ÖA6: Önceki ispatları içeriyor ama bana göre doğru…

ÖA5: Neden 0'dan başladığımızı anlamadım ben…

ÖA8: Ben burada ardışık sayılardan yararlandım ve iki ardışık sayı toplamının ardışık tek sayıları vermesi için de bir basamak kaydırmam gerekiyordu. Aslında ben orada 0 kullanmadım sadece alt alta bir sütun kaydırarak topladım. Net olarak gösterebilmek içinde 0 ile başladım… Yazmasak da olur aslında…

ÖA3: Doğru evet olabilir…

ÖA5: Benim şurada kafam karıştı… İlk toplamın formülü tamam ama ikinci $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ *olması gerekmez mi?*

Diğer Adaylar: Yok hayır…

ÖA8: Son terim $(n-1)$ *ve kuralda 1 fazlası alındığında…* $\frac{n.(n-1)}{2}$ *olur…*

ÖA5: Tamam şimdi… O zaman doğrudur… Toplam yine değişmez… Satır kaydırsak da sonuç değişmez…

Öğretmen adaylarının oluşturdukları beşinci ispat modeli toplam notasyonu ve ardışık sayıların toplamı üzerine cebirsel olarak kurulmuştur. ÖA7 tarafından oluşturulan modelde toplam sembolünün özellikleri ve ön bilgiler kullanılmıştır. Bu yüzden diğer adayları ikna etmekte zorlanmadığı söylenebilir.

ÖA7: Toplam sembolünü kullanarak bir ispat yapılabilir… $\sum_{n=1}^{k}(2n-1) = 1+3+5+\cdots+(2k-1)$ *şeklinde modelini yazabiliriz. Şimdi ben bu toplamı ayrı ayrı yazarsam…*

$\sum_{n=1}^{k} 2n - \sum_{n=1}^{k} 1$ *şeklinde yazabilirim… Buradan* $2\sum_{n=1}^{k} n - \sum_{n=1}^{k} 1$ *olur. Buradaki ilk toplam 1 den* n *ye kadar olan sayıların toplamıdır. Yani, ardışık sayıların toplamını veren kurala göre ilk ifade,* $2.\frac{k.(k+1)}{2} = k.(k+1)$ *olur. İkinci ifade de değişkenim* n *olduğuna göre* k *ya kadar değer alabileceğine göre,* $\sum_{n=1}^{k} 1 = k.1 = k$ *olur. Dolayısıyla toplam,*

$k(k+1) - k = k^2 + k - k = k^2$ *olur.*

ÖA1: Mantıklı, olabilir…

ÖA3: Ama tabi burada ardışık sayıların toplamını biliyor olmamız gerekir…

ÖA7: Evet onu da biliyor olmamız gerekli…

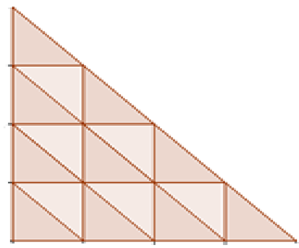
ÖA2: Tümevarım mantığıyla doğru orantılı, elbette doğru…

Öğretmen adaylarının geliştirdikleri son ispat modeli ise yine ÖA1 tarafından şekilsel olarak oluşturulmuştur. ÖA1 bu modelde ardışık tek sayılar için üçgen ve toplam için ise alan modellerinden yararlanmıştır. Öğretmen adaylarının bu modelin oluşumu sürecindeki söylemleri ve ortaya çıkan model aşağıda sunulmuştur.

ÖA1: Ben bir de üçgenler yardımıyla bir geometrik model oluşturdum…

Mülakatçı: Hep beraber bakalım lütfen…

ÖA1: Alanı 1 birim kare olan bir ikizkenar dik üçgen alalım… Daha sonra ikizkenarları kenar kabul eden bir kare ve yine aynı ikizkenar üçgeni bu üçgenin altına çizelim… Yani 3 tane aynı üçgenden elde ederiz… Daha sonra iki kare ve yine aynı üçgeni alta çizdiğimizde beş tane aynı üçgenden elde edilir… Bu şekilde devam edilirse, 1, 3, 5,…, şeklinde tek sayılar elde edilir. Şimdi bunların toplamını bulmak için alanları toplamamız yeterli olacaktır. Yani, $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ *ifadesinde* n *terim olacağı için* $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ *olduğu görülür…*



Şekil 5. ÖA1 tarafından oluşturulan model

ÖA2: Mantıklı görünüyor…

ÖA7: Bir birim kabul etmeseydik olmayacaktı ama…

ÖA1: Burada 1 br^2 almamızın sebebi 1+3+5… şeklindeki toplamı bulmak için farklı kabul etsek örneğin 2 olsa 2 katı olan toplam elde edilir… Dolayısıyla toplamdaki sayılar değişir…

ÖA3: Evet farklı bir toplam olur…

ÖA7: Tamam şimdi oldu, anladım…

ÖA6: Mantıklı evet doğru, kullanılabilir…

ÖA4: Çok farklı ve ilginç görünüyor…

4. Sonuç ve Öneriler

Araştırma, matematiksel ispat ve model oluşturma becerisi arasında bir ilişki kurulabilmesi amacıyla gerçekleştirilmiştir ve sonuçta adayların ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatında sözel, cebirsel ve şekilsel modeller ürettikleri gözlenmiştir. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının ardışık tek sayıların toplamına yönelik 6 farklı model oluşturdukları görülmüştür. Adayların bu süreçte daha çok cebirsel ve şekilsel modeller oluşturdukları gözlenmiştir. Oluşturulan sözel modellerin ise hem cebirsel hem de şekilsel modellere ulaşmakta yol gösterici olduğu söylenebilir. Çünkü adaylar cebirsel ve şekilsel modelleri sözel modeller üzerine kurgulamışlardır. Adayların model oluşturma süreçlerinde ön bilgilerinin (ardışık sayıların toplamını veren kural) etkili olduğu ve özellikle geometrik modellerin kullanıldığı ispatlarda diğer adayları ikna etmekte cebirsel ispatlara oranla daha fazla zorlandıkları gözlenmiştir. Dolayısıyla bu sonuç adayların modellerini kuracakları varsayımı belirleme ve aktarma noktasında güçlük yaşamaktadır (Blum & Leib, 2007) sonuçlarını desteklemektedir. Bununla birlikte geometrik model kullanılarak yapılan ispatlarda adayların kullandıkları modellerin geçerlilikleri noktasında daha fazla argüman kullanmaları muhakeme yeteneğinin gelişimi açısından önemlidir. Çünkü teoremler ispatlanırken kişilerin informal bilgilerinden yola çıkılarak formal bilgilere ulaşmalarının sağlanması daha anlamlı, kalıcı ve etkili öğrenmeyi sağlamaktadır (Raman, 2003). Ayrıca ispatlarda değişik materyal ve modellerin kullanılmasının öğrencilerin ispat kapasitelerini arttırmakta etkili olduğu belirlenmiştir (Andreas Stylianides, 2007).

Öğretmen adaylarının araştırmada kullanılan abaküs probleminin ispatı için birçok fikir ortaya attıkları ve çeşitli varsayımlar üzerinden ispatlarını test etme fırsatı yakalayabildikleri görülmektedir. Dolayısıyla araştırma sonuçları, uygun etkinlikler kullanıldığında öğretmen adaylarının modeller yardımıyla ispat yapmakta başarılı olabileceklerini ve bu sayede matematiksel muhakeme yeteneklerine katkı sağlanabileceğini ortaya koymaktadır. Araştırmada elde edilen bu sonuç alan yazında yer alan ve ispat yapma becerisinin gelişimi için model kullanımını öneren (Çiltaş ve Yılmaz, 2013) çalışmanın sonuçlarıyla tutarlıdır. Bununla birlikte matematiksel ispatlarda model kullanımının ispata yönelik tutumu olumlu yönde etkilediği yapılan araştırmalarla (Ünveren, 2010) ortaya konulmuştur. Bu yüzden öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik olumsuz tutumlarının (Almeida, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve

Yeşildere, 2006) değiştirilebilmesi için ispatlarda model kullanımının desteklenmesi önerilebilir. Çünkü öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik algılarının ispatı ileriki dönemlerde derslerinde kullanım sıklığını etkilediği yapılan araştırmalarla (Almeida, 2000; Furinghetti & Morselli, 2009) gösterilmiştir. Benzer şekilde matematiksel ispatta kullanılan modellerin verilen bir ifadenin içselleştirilmesinde önemli bir rol üstlendiği, öğretmen adayının zihninde oluşturulacak bir zihinsel model ile ispat yapmaya olan tutumu değiştirmeğe olanak sağlayabilir (Çiltaş ve Yılmaz, 2013).

Bu araştırmanın bulguları ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatının modeller yardımıyla yapılmasıyla sınırlıdır. Dolayısıyla Hanna ve Sidoli' nin (2007) de belirttiği gibi matematik ve matematik eğitimi görsel temsillerin potansiyel rollerinden ve özellikle de ispata yönelik rollerinden hala oldukça uzakta bulunmaktadır. Bu yüzden öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerine yönelik model oluşturma süreçlerinin incelenmesi önerilebilir. Ayrıca benzer etkinliklerle öğretmen adaylarının farklı bakış açıları geliştirmeleri ve bunları ileride öğrencilerine yansıtabilmeleri sağlanabilir.

An Investigation of Model Creation Skills to Proof of Prospective Mathematics Teachers about the Sum of Successive Odd Numbers

Extended Abstract

One of the most important objectives of mathematics education is enabling students to provide rational answers to “why“ questions about concepts they will learn. These inquiries of students in the conceptualization process depends on their mathematical proof and reasoning abilities. Because, mathematical proof lies at the heart of mathematical education (Almeida, 2003), and covers communication, exposing relations, making predictions, connecting concepts, affirming expressions and generalizing new knowledge (Harel & Sowder, 1998; Schabel, 2005). Due to these qualities, many studies emphasize that mathematical proof is required in mathematical education (Knuth, 2002) and there is an increasing need for mathematical proof (Reiss, Heinze & Kleieme, 2002). Moreover, the renewed secondary education mathematics curriculum covers more than providing students with basic mathematical concepts in their mathematical education process. For this reason, mathematical thinking, problem solving, mathematical reasoning and proof, connection, using mathematics as a communicative language and modelling skills are the basic components of mathematics learning and teaching (MEB, 2013). Various studies revealed the relation between mathematical problem solving and proof approaches of students (Tall, 1991; Weber, 2005) and a close relation was found between mathematical proof and problem solving (Weber, 2004). However, there is only limited relation between mathematical modeling and mathematical proof. Because, there is a limited relation between mathematical modeling of real-life problems and proof (Mudaly & De Villiers, 2004). Modeling approach in mathematics learning and teaching creates a generalizable and re-usable system of relations rather than finding a solution to a problem (Doerr & English, 2003) and this approach aims to develop models to discover patterns and relations and use these models in solving other problems (Olkun et al., 2009). Therefore, though it is seemingly hard to establish relationship between solution of real-world problems and proof, the value of solving real-life problems in proof process cannot be underestimated (Hodgson & Riley, 2001). Hence, we can establish a relationship between mathematical proof and modeling (Mudaly & De Villiers, 2004). For this purpose, secondary education prospective math teachers were introduced the rule providing the sum of successive odd numbers with model proofs, and the study aims to look into model creation skills regarding proof the rule providing the sum of successive odd numbers.

Case study, which allows us make an in-depth analysis of a group or an event, is employed as the research design. The research was carried out with focus group discussion method on 20 out of 52 prospective teachers selected on voluntary basis, and taking Special Teaching Methods course in the fall term as students of pedagogical formation programme in a university in the Black Sea Region during the 2013-2014 academic years. 12 female and 8 male prospective teachers participated in the focus group discussion.

Research data was collected by a focus group discussion performed in classroom environment at the last week of the Special Teaching Methods course. “Abacus Problem”, which includes the sum of successive odd numbers, was used in the focus group discussion. Descriptive analysis method was used in analysis of the gathered data.

According to research results, prospective teachers created six different proof models consisting of verbal, algebraic and formal models to prove the rule providing the sum of successive odd numbers. It was observed that prior knowledge of prospective teachers was effective in their model creation process (the rule providing the sum of successive odd numbers), and they had much more difficulties in proofs with geometrical models compared to algebraic proofs while persuading other prospective teachers. Moreover, regarding the validity of models used by prospective teachers in proofs with geometric models, usage of more arguments is significant in terms of improving their reasoning skills. Because, helping people use their informal knowledge to reach formal knowledge enables meaningful, permanent, and effective learning with regards to theorem proofs (Raman, 2003). Besides, use of different materials and models is effective in increasing the proof capabilities of students (Andreas Stylianides, 2007).

It is observed that prospective teachers came up with various ideas to prove the abacus problem in the research, and tested their proofs using different hypotheses. Therefore, research results show that prospective teachers can be successful in proof by models with the employment of suitable activities, and this, in turn, can contribute to their mathematical reasoning skills. This result shows parallelism with results of study in the literature (Çiltaş & Yılmaz, 2013). Moreover, the positive impact of using models in mathematical proofs is revealed by various studies (Ünveren, 2010). For this reason, use of models in proofs can be suggested to change the negative attitude of prospective teachers about mathematical proof (Almeida, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006). Because, various studies (Almeida, 2000; Furinghetti & Morselli, 2009) have shown that prospective teachers’ perception about mathematical proof influences their frequency of using proof in their future courses. Similarly, models used in mathematical proofs play a significant role in internalization of a given statement, and a cognitive model pictured in the minds of prospective teachers can help change this attitude towards proof (Çiltaş & Yılmaz, 2013). Findings of this research are limited to proving the rule providing the sum of successive odd numbers with models. Therefore, analysis of prospective teachers’ model creation processes of different proof methods can be suggested. Prospective teachers can develop different points of view with similar activities, and reflect these on their students in the future.

Kaynaklar/References

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488.

Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademede (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Blum, W., & Leib, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. R. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling, ICTMA–12, Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing,.

Çiltaş, A. ve Yılmaz, K. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının teoremlerin ifadeleri için kurmuş oldukları matematiksel modeller. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(2), 107-114.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 333-344.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students'mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Eraslan, A. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri üzerinde düşünme süreçleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 12*(4), 2953-2970.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). *Teachers' beliefs and the teaching of proof*. Paper presented at Proceedings of ICME Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, Taipei, Taiwan.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 20*(2), 571-590.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2004). *Proving and modeling*. In H. W. Henn, & W. Blum (Eds.), Applications and modelling in mathematics education, ICMI Study 14 (pp. 109-114).Dortmund, Germany.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM-Mathematics Education, 39*, 73-78. doi: 10.1007/s11858-006-0005-0.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: AMS.

Hodgson, T., & Riley, K. (2001). Real-world problems as contexts for proof. *Mathematics Teacher, 94*(9), 724.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kaleli-Yılmaz, G. (2014). Durum çalışması. In M. Metin (Ed.), *Kuramdan Uygulamaya Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (pp. 261-285). Ankara: Pegem Akademi.

Knuth, E. (2002). Teacher's conceptions of proof in the contex of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 61-88.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2011). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 14*(1), 147-160.

Mudaly, V., & De Villiers, M. (2004). *Mathematical modeling and proof*. Paper presented at Proceedings of the 10th Conference of Association for Mathematics Education of South Africa, University of the Nort-West, Potchefstroom.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartın, F. T. ve Gülbağcı, H. (2009). Modelleme yoluyla problem çözme ve genelleme: İlköğretim öğrencileriyle bir çalışma. *Eğitim ve Bilim, 34*(151), 65-73.

Raman, M. J. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Reiss, K., Heinze, A., & Klieme, E. (2002). Argumentation, proof and the understanding of proof. In G. H. Weigand, N. Neill, A. Peter-Koop, K. Reiss, G. Törner, & B. Wollring (Eds.), *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, Potsdam, Hildesheim: Franzbecker.

Schabel, C. (2005). An instructional model for teaching proof writing in the number theory classroom. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 15*(1), 45-59.

Shipley, A. J. (1999). *An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs* (Unpublished doctoral dissertation). University of American, Washington.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 237–253.

Stylianides, Andreas J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Stylianides, Gabriel J. (2007). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 191-215.

Tall, D. O. (1991). *The psychology of advanced mathematical thinking*. Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Holland.

Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101-119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behaviour, 23,* 115–133.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour, 24,* 351-360.

Kaynak Gösterme

Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(3), 446-462.

Citation Information

Güler, G., & Temizyürek, A. (2015). An investigation of model creation skills to proof of prospective mathematics teachers about the sum of successive odd numbers. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(3), 446-462.