İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi[1]

Candaş Uygan[2]

Dilek Tanışlı[3]

Nilüfer Y. Köse[4]

Özet

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik inançlarını, kanıtlama ve örnek kanıtların geçerliliğini değerlendirirken yaptıkları muhakeme süreçlerini incelemektir. Çalışma nitel bir araştırmadır. Katılımcılar bir devlet üniversitesinde öğrenimlerine devam eden üç ilköğretim matematik öğretmeni adayıdır. Katılımcıların kanıta yönelik inançları yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla, kanıt yapma süreçleri ve örnek kanıtları değerlendirme süreçleri ise klinik görüşmelerle incelenmiştir. Görüşmeler video kaydına alınmış ve veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Kanıta ilişkin inançlar incelendiğinde, katılımcıların kanıtı bir tür problem çözümü ve bilginin kaynağını araştırma olarak gördükleri; kanıtın tümdengelimli, sonucu genellenebilir ve anlaşılabilir olması gerektiğini vurguladıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra katılımcıların kanıt yapmaya ilişkin yeterli düzeyde olmadıklarına da inandıkları belirlenmiştir. Kanıt yapma süreçleri incelendiğinde ise katılımcıların teoremdeki hüküm ifadesini teoremin öncülü gibi düşündükleri ve ezbere stratejiler kullandıkları görülmüştür. Son olarak kanıt değerlendirme sürecinde katılımcıların bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamaları matematiksel bir kanıt için yeterli olarak düşünebildikleri ve aksiyomatik yapıyı bozan gerekçeleri değerlendirmekte hata yaptıkları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kanıt bağlamındaki inançlar, kanıt yapma, kanıt değerlendirme, öğretmen eğitimi

Abstract

The purpose of this study is to research pre-service elementary mathematics teachers' beliefs on meaning and features of mathematical proof, their proving processes and their reasoning process while evaluating validities of proof examples. This study is a qualitative research. Participants of the study are three pre-service elementary mathematics teachers who continue to study in a state university from Central Anatolia Region. Participants' beliefs on proof were researched with semi-structured

---

[1]Bu çalışmanın bir bölümü 1.Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

[2]Arş. Gör., Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, cuygan@ogu.edu.tr

[3]Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, dtanisli@anadolu.edu.tr

[4]Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

interview whilst proving processes and evaluation processes of proof examples were researched with clinical interviews. Interviews were recorded with video camera and data were analyzed according to qualitative methods. When beliefs on proof were analyzed, it was indicated that participants see mathematical proofs as problem solving process and exploration of source of mathematical knowledge, and believe that proofs have to be deductive, apprehensible and have to include generalizable results. Also according to opinions of all three participants, they believe that their proving abilities are insufficient. Analyze results related to proving processes indicated that pre-service teachers considered conclusions of theorems as if they are conditions of theorems and also used proving strategies uncomprehendingly in proving process. Finally, analyze results related to proof evaluation process indicated that participants assessed computer based experimental verifications as valid mathematical proofs and had mistakes when they evaluated warrants used in verifications that break axiomatical structure of proofs.

Key Words: Beliefs in the context of proof, proving, proof evaluation, teacher education

1. Giriş

Öğretim sürecinin planlanmasında ve gerçekleştirilmesindeki en temel aktör öğretmenlerdir. Bu nedenle öğretmenin sahip olması gereken yeterlilikler araştırmacıların her zaman ilgilendiği kritik bir konu olmuştur (Ball, 1990; Even, 1990; Koehler & Mishra, 2005). Bu konuya ilişkin çalışmalar öğretmen yeterliğini oluşturan bileşenlerin analiz edilmesini ve modellenmesini sağlarken, bu bağlamda geliştirilen pedagojik alan bilgisi modeli sonraki çok sayıda araştırmanın temelini oluşturmuştur (Shulman, 1986; Shulman, 1987). Pedagojik alan bilgisi modelinde öğretmenlerin alanlarıyla ilgili sahip oldukları inançlar, modeldeki her bir bilgi boyutunun önemli bir belirleyicisidir (Furinghetti, 2007). Dolayısıyla inançları ve bilgileri birbirinden bağımsız olarak değerlendirmek doğru değildir. Çünkü kişi bir konuya yönelik inancını sıklıkla bir bilgi gibi ele almakta ve buna göre yaklaşımlar sergilemektedir (Thompson, 1992). Bu ilişki matematik öğretimi bilgisinde de benzer biçimde ortaya çıkmakta ve derslerde öğretmenlerin kullandığı benzeşimlere, materyal kullanımına, öğrencilere yöneltilen sorulara ve verilen dönütlere etki etmektedir.

Bu konuda Ernest (1989’den Akt. Morselli, 2008) öğretmenin matematiğe ve matematiğin öğretimine yönelik inançlarının matematik öğretimini etkileyen üç anahtar öğeden birisi olduğunu açıklamıştır. Ayrıca Thompson (1992) öğretmen inançları bağlamında matematiğin öğrenimine yönelik inançlarının da önemli yere sahip olduğunu belirtmiş ve öğretmen inançlarını “matematiğe yönelik inanç” ve “matematik öğretimi ve öğrenimine yönelik inanç” olmak üzere iki başlıkta incelemiştir. Matematik öğretimi ve öğrenimine yönelik inanç öğretmenin matematiğin nasıl öğretileceğine yönelik geliştiği anlayışı içerirken; matematiğe yönelik inanç ise, öğretmenin matematiğin anlamı, yapısı ve özelliklerini nasıl algıladığını ve kavramsallaştırdığını göstermektedir (Thompson, 1992). Bununla birlikte matematiğin doğasına ve gelişimine yönelik doğru bir anlayış geliştirmek için matematiğin inşasındaki temel yapı taşı olan kanıtın yapısıyla ilgili doğru inanca sahip olmanın önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü matematiksel kanıt, tümdengelimli doğasıyla birlikte matematiğin tüm konularıyla iç içedir (NCTM, 2000). Dolayısıyla kanıtın matematikteki rolüne ve nasıl öğretilmesi gerektiğine yönelik öğretmen inançları birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Alibert, 1988, akt. Yoo, 2008; Knuth, 2002a; Knuth, 2002b; Mingus & Grassl, 1999; Selden & Selden 2003).

Kanıt, birisinin bir önerme ya da ifadenin doğruluğuna ilişkin kendisini ve başkasını ikna etme sürecinde ortaya koyduğu mantıksal argümanlar olmakla birlikte, muhakeme ve çıkarım yapma, çıkarımı doğrulama ve savunma gibi süreçleri de kapsamaktadır (Harel & Sowder, 1998; Stylianou, Chae & Blanton, 2006). Felsefe, hukuk, siyaset gibi alanlardan gündelik tartışmalara kadar hayatın her alanında insanlar bir düşüncenin doğruluğunu yaptığı argümanlarla savunurken, bu süreçte hayatın farklı alanlarına ilişkin gözlem ve deneyimleriyle argümanlarını gerekçelendirebilmektedir. Buna karşılık matematiksel kanıtların tümdengelimli yapısı gereği argümantasyon sürecindeki gerekçelerin aksiyomatik karakterde olması gerekmektedir (Esty, 1992). Bu özelliğiyle matematiksel kanıt günlük yaşamdaki informel kanıtlardan ayrılmaktadır. Bunun yanında De Villiers (1990) matematiksel kanıtın özelliklerini (fonksiyonlarını) doğrulama (verification), açıklama (explanation), sistematizasyon (systematisation), keşif (discovery), iletişim (communication) olarak açıklamıştır. Bu çerçevede, kanıt süreci kişinin bir matematiksel önermenin doğruluğuna yönelik kendisini ikna etmesiyle başlarken, bu aşama kanıtın "doğrulama" özelliğine karşılık gelmektedir. Kanıtın bir diğer özelliği olan "açıklama" kişinin bu önermenin neden doğru olduğunu ortaya çıkarmasını vurgulamaktadır. Sistematizasyon, kanıtta aksiyomların, temel kavramların ve teoremlerin oluşturduğu tümdengelimli sistem içerisinde ulaşılan sonuçların düzenlenmesine odaklanmaktadır. Keşif, kanıtta gerçekleştirilen çıkarımlar üzerinden yeni sonuçların ve hipotezlerin üretilmesini ifade etmektedir. İletişim ise kanıtta ulaşılan sonuçların paylaşılması, tartışılması ve doğruluğun farklı kişilerce kabul edilmesini ya da reddedilmesini kapsamaktadır.

Matematiğin aksiyomatik ve tümdengelimli yapısına yönelik doğru bir anlayışın gerçekleştirilmesi için bu yapının temelini oluşturan matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik inancın doğru olması gerekmektedir (Knuth, 2002a; Morselli, 2008). Buna karşılık yapılan araştırmalar ilköğretim (elementary) ve ortaöğretim (secondary) matematik öğretmenlerinin kanıta ilişkin yanlış anlamlara sahip olabildiklerini göstermektedirler. Knuth (2002b) çalışmasında ortaöğretimdeki deneyimli öğretmenlerin kanıtı matematiğin tüm konularıyla ilişkili değil, matematiğin içinde ayrı bir konu olarak gördüklerini ortaya çıkarmıştır. Diğer bir çalışmada Selden ve Selden (2003) ortaöğretim matematik öğretmenliği son sınıf öğrencilerinin verilen kanıtların geçerliliğini değerlendirirken argümanların tümdengelimli ve aksiyomatik yapısına bakmak yerine gereksiz ayrıntılara odaklandıklarını ortaya koymuşlardır. İlköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt değerlendirme süreçlerini inceleyen bir araştırmada ise öğretmenlerin tümdengelimli kanıtların yanı sıra özel örneklerle yapılan doğrulamaları da kanıt bağlamında geçerli kabul ettikleri belirlenmiştir (Martin ve Harel, 1989). Bunun yanında Türkiye'de ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt yapma düzeylerine ilişkin yapılan bir araştırmada Köğce (2013) öğretmen adaylarının bir bölümünün kanıt yaparken bir kümeden seçtikleri birkaç özel örnek üzerinden genellemeye ulaştıklarını ve matematiksel dili doğru kullanamadıklarını gözlemlemiştir. Başka bir çalışmada Doruk ve Kaplan (2013) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığına ilişkin kanıtları değerlendirmede başarısız olduklarını ortaya koymuşlardır. Araştırmacılar bu başarısızlığın nedenlerini öğretmen adaylarının kanıtlardaki anahtar düşünceleri doğru okuyamamaları, matematiksel dil ve notasyonları doğru kullanamamaları, kanıta yönelik ezber ve sonuç temelli bir yaklaşım benimsemeleri olarak açıklamaktadır. Literatürdeki araştırmaların ortaya çıkardığı sonuçlar öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kanıtın anlamına ve özelliklerine ilişkin hatalı yaklaşımlar sergileyebildiklerini göstermektedir. Bu hatalı yaklaşımları derinlemesine inceleyen Moore (1994, s.251 - 252) matematik ve matematik öğretmenliği lisans programlarındaki öğrenci hatalarının nedenlerini üç temel başlıkta toplamıştır. Buna göre (a) öğrencilerin kanıta yönelik kavramsal bilgileri eksiktir; (b) öğrenciler matematik dilini anlama ve kullanma konusunda sıkıntı yaşamaktadırlar; (c) öğrenciler kanıt sürecine nasıl başlayacaklarını bilememektedirler.

Bunun yanı sıra, kişilerin kanıt sürecinde kullandıkları argümanların doğruluğuna yönelik kendilerini ve başkalarını ikna ederken temel aldıkları yaklaşımları inceleyen araştırmacılar bu yaklaşımları kanıt şemaları olarak adlandırmışlardır (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998; Harel & Sowder, 2007). Bu bağlamda, kitaptan okuduğu ya da öğretmeninden duyduğu bir çözüm yöntemini ya da bilgiyi anlamını bilmeden kanıt sürecinde kullanan öğrenciler otoriter kanıt şemasına sahiptir. "Çünkü kitap/öğretmen böyle söylüyor" biçimindeki gerekçe bu şemaya sahip olan öğrencilerin düşüncelerini yansıtmaktadır. Kanıta yönelik sıkça tekrarlanan bir işlemsel şablonu ezberleyen ve kanıt sürecini bu şablona göre biçimlendirmeye çalışan öğrenciler ritüel kanıt şemasına sahiplerdir. "Çünkü derste kanıtları hep bu yolla yapıyoruz" cümlesi bu şemadaki öğrencilerin düşüncelerini betimlemektedir. Matematiksel sembolleri, tanımları ve algoritmaları anlamlarından uzak ve hatalı biçimde kullanarak kanıt yapan öğrenciler sembolik kanıt şemasına sahiplerdir. Bu şemadaki öğrencilerin çoğunlukla kullandıkları matematiksel terim ve sembollerin anlamını bilmedikleri görülmektedir. Harel ve Sowder (1998) otoriter, ritüel ve sembolik kanıt şemalarını "dışsal kanıt şeması" üst başlığında toplamışlardır. Tam olarak gelişmemiş zihinsel imajlarına dayalı olarak çıkarım yapan öğrenciler sezgisel kanıt şemasındalardır. Diğer yandan kanıt sürecinde, üzerinde çalışılan kümenin sınırlı sayıdaki elemanlarını kullanarak doğrulama yapan ve tüm kümeye yönelik çıkarım yapan öğrenciler örnek temelli kanıt şemasına sahiplerdir. Sezgisel ve örnek temelli kanıt şemaları "deneysel kanıt şeması" üst başlığı altında yer almaktadır. Bunun yanında, özel örnekler yerine matematiksel değişkenler ve oluşumlar üzerinde yapılan özel manipülasyonlar sonucu genellemeye ulaşan öğrenciler dönüşümsel kanıt şemasına sahiplerdir. Bu şemaya sahip olan öğrenciler kanıt sürecinde tümevarımsal çıkarımların yanında tümdengelimli muhakeme sürecini de kullanabilmektedirler. Son olarak doğrulama sürecinde aksiyomatik sisteme dikkat eden ve tümdengelimli çıkarımlar gerçekleştirerek formal bir kanıt ortaya koyan öğrenciler aksiyomatik kanıt şemasındadırlar. Literatürde dönüşümsel ve aksiyomatik kanıt şemaları "analitik kanıt şeması" üst başlığında toplanmaktadır (Harel & Sowder, 1998). Alanyazındaki pek çok araştırmada öğrencilerin kanıt şemalarının üst düzey basamaklara doğru geliştirilmesi için, tanım – teorem – kanıt gibi öğretmen merkezli geleneksel kanıt öğretimi yerine matematik öğrenme süreci içinde argüman geliştirme, geliştirilen argümanı savunma ve tartışmayı içeren yöntemlerin tüm sınıf düzeylerinde kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır (Alibert, 1988, akt. Yoo, 2008; De Villiers, 2003; Dean, 1996; NCTM, 2000).

İlköğretimden itibaren öğrencilerde matematiksel akıl yürütme ve kanıt becerilerinin (NCTM, 2000) gelişimi için öncelikle öğretmenlerin kanıtın anlamına ilişkin doğru inanca sahip olması, formel bir kanıtı oluşturabilmesi ve bir kanıtın formel yapısını bozan unsurları değerlendirebilmesi oldukça önemlidir (Selden & Selden, 2003). Bu noktada, araştırmanın problemini öğretmen adaylarının bu yeterliklere ne kadar sahip olduğu sorusu oluşturmaktadır. Araştırmanın alt problemleri aşağıda görülmektedir:

1. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine ilişkin inançları nelerdir?
2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt yapmada kendi yeterliklerine yönelik inançları nelerdir?
3. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt sürecindeki muhakeme biçimleri nelerdir?
4. İlköğretim matematik öğretmeni adayları, örnek kanıtların doğruluğunu nasıl değerlendirmektedirler?

2. Yöntem

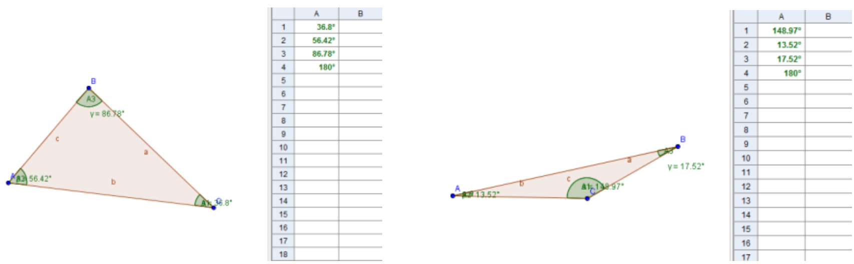
Araştırmanın verilerinin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

2.1. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını İç Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programının son sınıfında öğrenim gören üç öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının seçiminde kullanılan ölçüt ise adayların son sınıfta öğrenim görmeleri ve genel başarı ortalamalarının dörtlük sistemde 2.5 ile 3.0 arasında olmasıdır. Öğretmen adaylarının öğrenimlerine devam ettikleri lisans programında formel kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik konuları içeren Soyut Matematik, Cebire Giriş, Elementer Sayı Kuramı alan derslerini tamamlamış olmalarına dikkat edilmiştir. Böylece katılımcıların formel kanıtın anlamına ilişkin bir inanç geliştirdikleri, kanıt yapmaya yönelik deneyim ve beceri kazandıkları düşünülmüştür. Katılımcıların seçiminde öğretmen adaylarının gönüllü olmalarına dikkat edilmiş, dolayısıyla ikisi kadın, birisi erkek olan ve akademik başarı ortalamaları 2.5 – 3.0 arasında değişen üç öğretmen adayı ile derinlemesine olarak çalışılmıştır.

2.2. Verilerin Toplanması

Verilerin toplanmasında yarı yapılandırılmış görüşme ve klinik görüşme tekniğinden yararlanılmıştır. Bu süreç araştırmanın amacına bağlı olarak üç aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada öğretmen adaylarının matematiksel kanıtın anlamına ve kendi kanıt yapma yeterliklerine yönelik inançlarını incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. İkinci aşamada katılımcıların kanıt sürecindeki muhakeme biçimlerini ortaya koymak amacıyla klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşmelerde öğretmen adaylarından Öklid Teoremi'ni kanıtlamaları istenmiştir. Üçüncü aşamada da öğretmen adaylarının kendilerine verilen örnek kanıtların geçerliliğini nasıl değerlendirdikleri yine klinik görüşmeler ile araştırılmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarına üçgenin iç açıları ölçüleri toplamının 180^{o} olduğuna yönelik iki doğrulama sunulmuştur. Bunlardan ilki bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulama (bkz. Şekil 1) ve ikincisi aksiyomatik yönden hatalı doğrulamadır. Öğrencilere sunulan bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulama, deneysel kanıt şemalarına yönelik düşünme biçimlerini içermektedir. Bu bağlamda ilgili doğrulama dinamik geometri ortamındaki bir üçgen oluşumunun manipüle edilerek yeni üçgenlerin meydana getirilmesini ve bu sırada iç açıların ölçüleri toplamının değişmediğinin gözlenmesini içermektedir. Çalışmada kullanılan bu doğrulama örneği bilgisayar manipülatifleri yardımıyla ulaşılan özel örnekler üzerinden genelleme yapmayı kapsadığından araştırmacılar tarafından "bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulama" olarak adlandırılmıştır. Aksiyomatik yönden hatalı doğrulama ise, bir teoremin kanıtı yapılırken bu teoremin kanıtı sonucunda ortaya çıkan bir teoremin gerekçe olarak kullanılmasını içermektedir. Başka bir deyişle bu doğrulama örneğinde aksiyomatik sistem içinde hatalı bir çıkarım yapılmaktadır. Öğretmen adaylarına verilen bu örnekte, üçgende iç açıları ölçüleri toplamının 180^{o} olduğu kanıtlanırken, üçgende iki iç açının ölçüleri toplamının diğer iç açının bütünleyeninin ölçüsüne eşit olduğunu içeren teorem gerekçe olarak kullanılmaktadır. Katılımcılara bu doğrulamaların matematikte geçerli birer kanıt olup olmadığı sorulmuş ve değerlendirme sürecinde nasıl düşündükleri incelenmiştir.



Şekil 1. Bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulama örneği

2.3. Verilerin Analizi

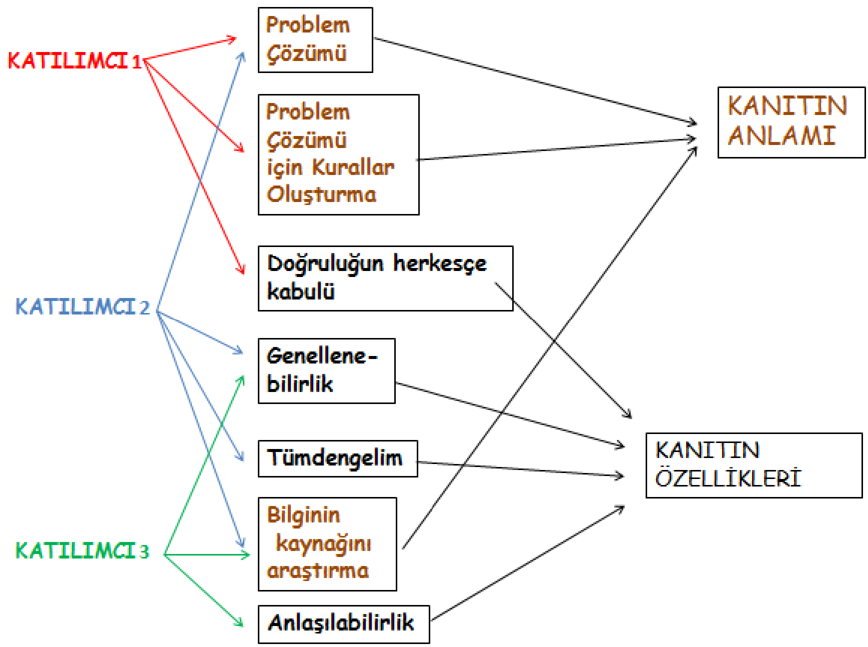
Verilerin analizinde Miles ve Huberman'ın (1984) üç aşamalı nitel veri analiz yöntemi kullanılmıştır. Bu aşamalar "verilerin azaltılması", "verilerin görsel hale getirilmesi" ve "sonuca ulaşma ve teyit etme" olarak ele alınmaktadır (Özdemir, 2010). Verilerin azaltılması sürecinde katılımcılardan görüşmelerle toplanan veriler incelenerek bazı kilit cümleler seçilmiş ve ham veri üzerinde eleme yapılmıştır. Verilerin görsel hale getirilme sürecinde seçilen cümlelerdeki ana düşünceyi yansıtan tema ve kategoriler belirlenmiş ve şema ya da tablo aracılığıyla görsel biçimde düzenlenmiştir. Sonuca ulaşma ve teyit etme sürecinde ise analize ilişkin çıkarımlar yapılmış ve sonrasında bu çıkarımlar kendi aralarında ve önceki araştırma sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu kısma çalışmanın tartışma bölümünde yer verilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının kanıtlama ve kanıt değerlendirme süreçlerindeki muhakeme biçimlerine yönelik ortaya çıkan sonuçların yorumlanmasında Harel ve Sowder'ın (1998) geliştirmiş olduğu kanıt şeması modeli ile ilişkiler kurulmuştur. Sonuçların yorumlanmasında Harel ve Sowder'ın (1998) modeli ile ilişki kurulmasının gerekçesi bu modelin üniversite düzeyindeki öğrencilerin kanıt şemalarını yansıtmasıdır.

3. Bulgular

Araştırma bulguları amaçlara uygun olarak dört ana temada düzenlenmiştir. Bu temalar "kanıta yönelik inançlar", "kanıt yapmada kendilerine yönelik inançlar", "kanıt yapma süreci" ve "kanıt değerlendirme süreci" olarak ele alınmıştır.

3.1. Katılımcıların Kanıta Yönelik İnançları

Çalışmanın birinci bölümünde öğretmen adaylarının kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik inançlarını ortaya çıkarmak amacıyla görüşmelerde "Matematiksel kanıt senin için ne demektir?" ve "Sence geçerli bir kanıtın sahip olması gereken özellikler neler olmalıdır?" soruları sorulmuş ve gerektiğinde bağlama yönelik ek sorular öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Adayların yanıtları ışığında, kanıt inançları "kanıtın anlamı" ve "kanıtın özellikleri" bağlamında iki alt temaya ayrılırken, bu alt temalar altında yedi kategori belirlenmiştir. Bu kategoriler Şekil 2'de görülmektedir.



Şekil 2. Katılımcıların matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik inançları

3.1.1. Kanıtın Anlamına Yönelik İnançlar

Kanıtın öğretmen adayları için "problem çözümü", "problem çözümü için kurallar oluşturma" ve "bilginin kaynağını araştırma" anlamlarına sahip olduğu Şekil 2'den de görülmektedir. Problem çözümü kategorisine yönelik olarak öğretmen adaylarının kanıt ile problem çözmeyi ilişkilendirdikleri görülmüştür. Bu noktada, birinci ve ikinci katılımcının kanıt sürecini bir tür problem çözme süreci olarak gördükleri; bu sürecin sonuçlarını ise sonraki problemlerin çözümü için temel oluşturacak bilgiler olarak anladıkları düşünülmektedir. Örneğin birinci katılımcı, "*bir problemin çözümü kanıt olabilir aslında… Kanıtlar, derste gördüğümüz teoremlere, problemlere yönelik çözümler…*" ifadesini kullanırken; ikinci katılımcı kanıtın "*bir problemin, başka problemlerin sonuçlarından türetilerek çözüme kavuşturulması*" olduğunu belirtmiştir.

Kanıtın anlamına yönelik "problem çözümü için kurallar oluşturma" bağlamında birinci katılımcı "*teoremde kanıtı kullanırız ve problem çözmede de kanıtlanan teoremi kullanırız*" şeklinde düşüncesini açıklarken; "bilginin kaynağını araştırma" kategorisine yönelik olarak iki numaralı katılımcı, "*bir problemin temelinin, doğruluğunun nereden geldiğinin araştırılması*" ve 3 numaralı katılımcı, "*bir şeyi kuralı biliyor olmaktan ziyade onun arka* *tarafını öğrenmek*” ifadelerine yer vermişlerdir. Bu noktada iki ve üç numaralı katılımcının kanıtı, doğru olduğu düşünülen matematiksel kuralların dayanaklarını araştırma süreci olarak gördükleri de düşünülmektedir. Bunun yanı sıra iki ve üç numaralı katılımcıların kanıtın kendileri için anlamını daha iyi açıklamak için metafor kullandıkları da görülmüştür. Bu noktada, ikinci katılımcı için, *“Matematik yığılarak ilerliyor ve eğer temelde bir hata yaparsanız daha sonra bu büyüyecektir. Kanıta burada bir kartopu dersek yuvarlanarak bir çığ oluşturur. Bu da matematiktir.”* ve üçüncü katılımcıya göre, *“Bir ağacın gövdesiyse eğer kanıt, dallar da meyveler de matematikmiş gibi…”* görüşleri ortaya çıkmaktadır. Buradan hareketle, ikinci katılımcı için kanıt matematiğin yığılmalı olarak ilerlemesini sağlarken, üçüncü katılımcıya göre matematik yapılan kanıtların ürünleridir.

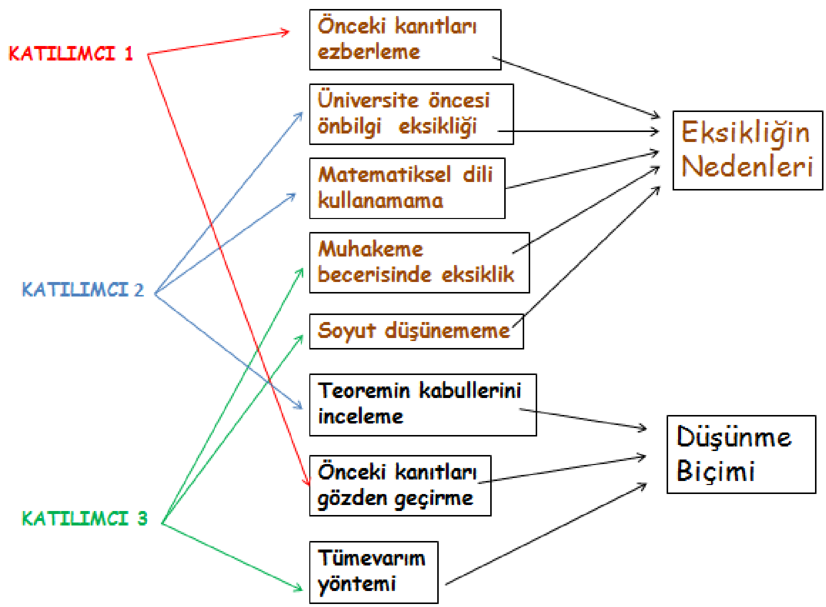
3.1.2. Kanıtın Özelliklerine Yönelik İnançlar

Öğretmen adaylarının geçerli bir kanıtın özelliklerine yönelik inançları “genellenebilirlik”, “tümdengelimli”, “anlaşılabilirlik” ve “doğruluğunun herkesçe kabul edilmesi” kategorileri altında ele alınmıştır. Kanıtın doğruluğunun herkesçe kabul edilmesine yönelik olarak birinci katılımcı “*Herkes tarafından kabul edilmeli öncelikle. Kanıt dediğimiz şeyler zaten genel olarak kabul edilen şeylerdir.*” ifadesini kullanmıştır. Bu kategorinin, kanıtın “iletişim” özelliğine yakın bir anlama sahip olduğu düşünülmekle birlikte bir kanıtın hangi süreçler içinde herkesçe doğru kabul edildiği katılımcı tarafından açıklanmamaktadır. “Genellenebilirlik” kategorisine yönelik olarak ikinci katılımcı “*Genellenebilir olmalı. Mesela bazen sayısal örneklerle başlıyorlar direk. O zaman bu bir kanıt olmuyor. Bunu genellememiş oluyoruz.”* açıklamasını yaparken; üçüncü katılımcı, “*Ben bir genelleme yapmış oluyorum mesela. Ama o genellemeyi sağlamayan bir durum ortaya çıkıyor. O zaman kanıt geçersiz olur.*” şeklinde düşüncesini belirtmiştir. “Genellenebilirlik” kategorisi bağlamında katılımcılar için kanıt, üzerinde çalışılan kümenin tüm elemanları için geçerli sonuçlar üretmelidir. Diğer yandan “tümdengelimli” kategorisine ilişkin olarak iki numaralı katılımcı, “*Doğru kabul ettiğimiz bir çıkış noktasından başlıyorsak eğer… Bunun üzerinden devam ettiğimiz işlemlerin tümü kanıt olabilir.*” ifadesine yer vermiştir. Bu noktada, “tümdengelimli” kategorisinin kanıtın “sistematizasyon” özelliğiyle ilişkili olduğu düşünülebilmektedir. “Anlaşılabilirlik” kategorisine yönelik olarak üç numaralı katılımcı “*Karşıdaki kişi için anlaşılabilir olmalı. Aslında benim gözümde örnek vermek de kanıt olabilir. Çocuğun anlaması için açıklama yoluna gitmek…*” açıklamasını yapmıştır. Bu kategori bağlamında üç numaralı katılımcının da kanıtın “iletişim” özelliğine değinen bir açıklama yaptığı görülmekle birlikte, formal ve informal türdeki kanıtlar arasında kesin bir ayrım yapmadığı da düşünülmektedir.

Katılımcıların inançları incelendiğinde, sadece ikinci katılımcının kanıtın “sistematizasyon” özelliğine değindiği görülmüştür. Ayrıca üçüncü katılımcı geçerli bir kanıtın genellenebilir sonuçlara sahip olması gerektiğini düşünse de, anlaşılabilirlik bağlamında özel örneklerle yapılan doğrulamaların da kanıt olarak görülebileceğine inanmaktadır. Diğer yandan bir ve üç numaralı katılımcıların inançlarının kanıtın “iletişim” özelliğine değindiği düşünülmekle birlikte kanıtın bu özelliğine yönelik de eksik anlamlara sahip oldukları anlaşılmaktadır.

3.2. Katılımcıların Kanıt Yapmada Kendilerine Yönelik İnançları

Öğretmen adaylarının kanıt yapmada kendilerine yönelik inançları incelendiğinde üç katılımcının da kendisini yeterli düzeyde görmediği belirlenmiştir. Bu bağlamda bu tema kendilerindeki eksikliğin nedenleri ve kanıt sürecindeki düşünme biçimleri yönelik olmak üzere alt temalara ayrılmıştır. Bu alt temalar altında öğretmenlerin kendilerine yönelik inançları sekiz kategoriye ayrılmış ve Şekil 3'deki gibi görselleştirilmiştir.



Şekil 3. Katılımcıların kanıt yapmada kendilerine yönelik inançları ve düşünme biçimleri

3.2.1. Kanıt Yapmadaki Eksikliğin Nedenlerine Yönelik İnançlar

Öğretmen adaylarına göre kanıt yapmadaki eksikliklerinin nedenleri, derste öğretmen tarafından yapılan kanıtları ezberlemeleri, üniversiteye gelene kadar formel kanıta ilişkin yeterli öğretim almamaları, matematiksel dili kullanamamaları, muhakemelerinin ve soyut düşünme becerilerinin düşük olmasıdır. "Önceki kanıtları ezberleme" kategorisine yönelik olarak birinci katılımcı, "*Kanıtlamada problem çözmede çok iyi olduğumu söyleyemem. Biz bunları (kanıtları) daha çok ezberlediğimiz için kanıt yapmakta zorlanırım açıkçası*." ifadesine yer verirken, üçüncü katılımcı, "*Önceki kanıtları birbirine benzetmeye çalışıyoruz. Sorunun ne sorduğu üzerine hiç düşünmüyoruz.*" açıklamasını yapmıştır. Diğer kategorilerden "Üniversite öncesi önbilgi eksikliği" ve "matematiksel dili kullanamama" bağlamında ikinci katılımcı, "*Çıkarım yapabiliyorum ama matematiksel dille ifade etmede zorlanıyorum. Çünkü bu (kanıt) bir anda ortaya çıktı. Üniversiteye geldik ve bir anda ispata başladık.*" şeklinde düşüncelerini belirtmiştir. Diğer iki kategori olan "muhakeme becerisinde eksiklik" ve "soyut düşünememe" ile ilgili olarak ise üçüncü katılımcı, *"Cebir dersindeki kanıtlarda sıkıntı yaşıyorum. Çok soyut kalıyor çünkü. Muhakeme gücünden yoksunuz sanırım. Aslında çok basit bir yöntem de olabiliyor."* açıklamasını yapmıştır.

3.2.2. Kanıt Sürecindeki Düşünme Biçimlerine Yönelik İnançlar

Düşünme biçimi teması altındaki kategoriler "teoremin kabullerini inceleme", "ön bilgileri gözden geçirme" ve "tümevarım yöntemini düşünme" olarak ortaya çıkmıştır. İlk kategori olan "teoremin kabullerini inceleme" için birinci katılımcı "*Kanıt yapacağım zaman (teoremin) kabullerine bakarım. Neyi anlatmak istediğine bakarım. Zaten bir teoremi anlamak için içindeki ifadeleri de anlamamız gerekiyor.*" ifadesine yer verirken; "ön bilgileri gözden geçirme" kategorisine yönelik olarak birinci katılımcı, "*Problemin ne olduğunu anlamaya çalışırım. Problem neyse ona göre aklımdaki bilgileri toparlamaya çalışırım.*" açıklamasını yapmıştır. Son kategori olan "tümevarım yöntemini düşünme" ile ilgili olarak ise üçüncü katılımcı, "*Kanıtlamaya çalışırken ilk aklıma tümevarım geliyor. Çünkü (kanıtın) tüm durumlar için sağlaması gerekir. Tümevarım da bunun karşılığı oluyor. Ama tüm konular da onunla çözülmüyor*" ifadesini kullanmıştır.

Açıklamalar incelendiğinde öğretmen adaylarının kanıt sürecinde problem çözme sürecine benzer düşünme biçimlerini benimsedikleri anlaşılmaktadır. Bir ve iki numaralı katılımcı için öncelikle teoremde verilenleri iyi anlamak gerekmektedir. Bununla beraber birinci katılımcı "problem çözme süreci" ile eşdeğer olan kanıt sürecine başlarken kanıt için hangi önbilgilere sahip olduğunu incelediğini belirtmiş, ancak bu bilgilerin özelliklerine ilişkin kesin bir açıklama getirmemiştir. Üçüncü katılımcının ise kanıta başlarken hemen tümevarım kanıt yöntemini kullanmayı düşündüğünü belirtmesi, onun kanıt sürecinde bu yöntemi merkeze alan bir yaklaşım benimsediğini düşündürmektedir.

3.3. Katılımcıların Kanıt Yapma Süreçleri

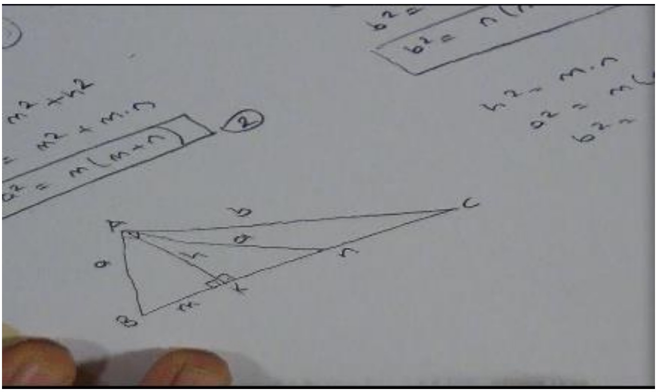
Öğretmen adaylarının kanıt yapma süreçlerine ilişkin veriler analiz edildiğinde Öklid Teoremi'ne ilişkin birinci ve ikinci katılımcının ikişer, üçüncü katılımcının ise bir yolla doğru bir kanıt yazabildiği görülmüştür. Bu noktada birinci ve ikinci katılımcı hem Pisagor, hem de üçgende benzerlik bağıntılarından yararlanarak; üçüncü katılımcı ise sadece benzerlik bağıntısından yararlanarak tümdengelimli yapıda formel kanıtlar oluşturmuşlardır. Buna karşılık katılımcıların kanıt süreci içerisinde bazı hatalı yaklaşımlar sergiledikleri görülmüş, gerekçeler ve hatalı yaklaşımlar/eksiklikler Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Katılımcıların kanıt sürecindeki hatalı yaklaşımları

	Kullanılan Gerekçe	Hatalı Yaklaşımlar ve Eksiklikler
Katılımcı 1	Pisagor Teoremi (Başarılı sonuç) Benzerlik Teoremi (Başarılı sonuç)	Teoremdeki sonuçları öncül gibi düşünmek Amaçsız ek çizimler yapmak
Katılımcı 2	Pisagor Teoremi (Başarılı sonuç) Benzerlik Teoremi (Başarılı sonuç) Üçgende alan bağıntısı (Başarısız sonuç)	Ezbere strateji kullanmak (tümevarım kanıt yöntemi) Teoremdeki sonuçları öncül gibi düşünmek
Katılımcı 3	Pisagor Teoremi (Başarılı sonuç) Benzerlik Teoremi (Başarısız sonuç)	Bağıntılar arası ilişki kuramamak Amaçsız ek çizim yapmak Teoremdeki sonuçları öncül gibi düşünmek

Üç katılımcının kanıt yapma sürecinde yaptıkları hatalı yaklaşımlar beş türe ayrılırken, tümdengelimli muhakeme sürecinde üç farklı bağıntı kullanılmıştır. İlk iki katılımcı bu bağıntılardan iki tanesi ile kanıt sürecini başarılı şekilde tamamlarken, üçüncü katılımcı ise bir bağıntı yardımıyla kanıt yazabilmiştir.

Birinci katılımcı sürecin başında kanıtı yapmakta zorlanacağını ifade etmiş ve verilenler üzerinde düşünürken sıkıntı yaşamıştır. Bunun devamında ise dik üçgenin özelliklerinden yola çıkarak Pisagor Teoremi'ni temel alan bir kanıt üzerinde düşünmeye başlamıştır. Bununla birlikte katılımcı Öklid Teoremi'ndeki önerme sonuçlarından bazılarını önermenin öncülü gibi ele alarak teoremin kanıtında kullanmayı düşünmüş, ancak sonrasında yaptığı hatayı fark etmiş ve farklı yollar izlemiştir. Sürecin devamında öğretmen adayı verilen dik



Şekil 4. Kanıt yapma sürecinde bir numaralı katılımcının ek çizimleri

üçgenlerin içinde belirli uzunlukta ek doğru parçaları çizerek bir ikizkenar üçgen oluşturabileceğini düşünmüştür (bkz. Şekil 4). Ancak katılımcıya göre bu işlemin belli bir amacı yoktur. Sonrasında, katılımcı incelenen şeklin özel bir üçgen olmadığını, dik üçgenlerin tümünü temsil eden bir değişken (oluşum) olduğunu ifade ederek bu temsil üzerinden kenar uzunluklarına yönelik ek çizimler yapılmasının bir sonuç vermeyeceğini belirtmiştir.

İkinci katılımcı, kanıt sürecine başlarken teoremdeki önermelerin kabul ve koşulları üzerinde düşünmeden hemen tümevarım kanıt yöntemini kullanmayı düşünmüştür. Bunun devamında süreci ilerletememiş ve başladığı stratejiden vazgeçmiştir. Katılımcı ikinci yaklaşımında teoremdeki önermelerin hükümlerini teoremin öncülleri gibi kullanmaya çalışmıştır. Sonrasında ise önerme hükümlerinin ulaşılması gereken sonuçlar olduğunu fark ederek yaptığı hatadan vazgeçmiştir. Katılımcının sürecin devamında tümdengelimli yaklaşım içinde hem Pisagor hem de üçgende benzerlik teoremlerinden yola çıkarak iki ayrı kanıt yaptığı, bununla birlikte üçgende alan bağıntısı üzerinden üçüncü bir kanıt yapmayı denese de başarılı olamadığı görülmüştür.

Üçüncü katılımcı, sürecin başında hemen ek çizim yaparak üçgeni bir dikdörtgene tamamlamayı düşünmüştür. Buna karşılık bu stratejinin kendisini nereye götüreceğini bilmediğini ifade etmiştir. Devamında ise süreci ilerletememiş ve kullandığı yöntemden vazgeçmiştir. Ardından teoremdeki dik üçgenlere yönelik Pisagor bağıntısını kullanarak bir kanıta ulaşabileceğini düşünse de elde ettiği eşitlikler arasında ilişkilendirme yapmakta başarılı olamamış ve bir süre sonra bu yöntemden de vazgeçmiştir. Diğer yandan katılımcının sürecin bir bölümünde teoremdeki önerme hükümlerini kanıt içinde öncül gibi kullandığı ancak zaman içinde hatasını fark ettiği görülmüştür. Bu hatalı yaklaşımlara karşılık katılımcı sürecin sonunda üçgende benzerlik bağıntısını kullanarak tümdengelimli bir kanıt yazmayı başarmıştır.

3.4. Katılımcıların Kanıt Değerlendirme Süreçleri

Öğretmen adaylarının kendilerine verilen örnek kanıtı değerlendirme sürecine ilişkin düşünceleri incelendiğinde bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamanın bir ve üç numaralı katılımcı tarafından, aksiyomatik yönden hatalı doğrulamanın ise bir ve iki numaralı katılımcı tarafından geçerli matematiksel kanıt olarak değerlendirildiği görülmüştür. Katılımcıların doğrulamalara ilişkin değerlendirmeleri ve yanıtlarını destekledikleri gerekçeler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Katılımcıların kanıt değerlendirmeleri

	Deneysel – dönüşümsel doğrulama	Aksiyomatik yönden hatalı doğrulama
Katılımcı 1	- **Kanıttır.** "Üçgenin açıları değiştirildiğinde doğruluk değişmiyor."	- **Kanıttır.** "Derslerde hep bu şekilde yapılıyor." "Kabul edilen bilgi doğru."
Katılımcı 2	- **Emin değilim.** "Sadece ölçümler var." "Matematiksel dayanaklar yok."	- **Kanıttır.** "Özel örnekler değil değişkenler kullanılıyor." "Matematiksel bir dayanağı var."
Katılımcı 3	- **Kanıttır.** "Üçgenin köşeleri hareket ettirildiğinde ölçüler toplamı değişmiyor." "Karşıdakini ikna edebilir."	- **Geçerli bir kanıt değil.** "Kullanılan gerekçenin doğruluğunu bilmiyoruz."

Birinci katılımcı bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamayı bir kanıt olarak değerlendirmiştir, çünkü ona göre üçgenin iç açıları bilgisayar ekranında "*istenildiği kadar değiştirilse de*" açıların ölçüleri toplamı 180^{o} kalmaktadır. İkinci katılımcı ise sürecin başında verilen doğrulamanın bir kanıt olarak görülebileceğini, çünkü "*deneyler sonucunda iç açıların ölçüleri toplamının değişmediği*" gerekçesini söylese de, sonrasında düşüncelerinde emin olamadığını "*matematiksel temellerin burada hiç kullanılmadığını ve ölçümlerin yer aldığını*" belirtmiştir. Katılımcı son ifadesinde "*bu bir mantıksal çıkarım olabilir ama kanıt mı emin değilim*" demiştir. Üçüncü katılımcı ise bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamayı değerlendirirken öncelikle "*tek bir ölçüm sonucunun tatmin edici olmadığını*" ifade ederken, üçgenin köşeleri sürüklendiğinde ve açı ölçüleri değiştirildiğinde ise "*burada sonsuz kez tekrarlasak bile (sonucun) değişmeyeceğini gösteriyor. Kanıt olabilir bence o yüzden*." ifadesini kullanmıştır. Katılımcı görüşlerini *"(kanıt) bildiğimiz bir şeyin doğruluğunu göstermekti en basit tabiriyle. Öğrenciyi ikna edebilir*." ifadesiyle desteklemiştir. Bu bağlamda bir numaralı katılımcı görsel manipülasyonlarla incelenen örneklerden genelleme yapılabileceğini düşünmektedir. Buradan hareketle, katılımcının yaptığı değerlendirmede deneysel kanıt şemalarına yakın bir muhakeme biçimi gerçekleştirdiği görülmektedir (Harel & Sowder, 2007). Üç numaralı katılımcı görsel manipülatiflerin sunduğu örnekleri içeren doğrulamanın kişi için "ikna edici" olabileceğini ve bu nedenle de doğrulamanın kanıt olarak değerlendirilebileceğini düşünmektedirler. Buradan hareketle bu katılımcının da deneysel kanıt şemasına yakın bir kanıt değerlendirmesi yaptığı görülmektedir. Diğer yandan öğretmen adaylarından sadece iki numaralı katılımcının verilen doğrulamayı aksiyomatik yapısına göre değerlendirmeyi düşündüğü ancak onun da düşüncelerinde emin olamadığı görülmüştür.

Aksiyomatik olarak hatalı doğrulamanın değerlendirilmesine geçildiğinde katılımcılara “Bu doğrulama matematikte geçerli bir kanıt olarak değerlendirilebilir mi?”, “Yanıtının gerekçelerini açıklar mısın?”, “Bu doğrulamada kullanılan gerekçenin geçerliğini nasıl değerlendirirsin?” soruları yöneltilmiştir. Bir numaralı katılımcı bunun da bir kanıt olarak düşünülebileceğini; çünkü doğruluğu bilinen bir dayanağa sahip olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca katılımcı gerekçesinde “*derslerde hep bu şekilde kanıtların yapıldığı*” ifadesine yer vermiştir. Bu çerçevede birinci katılımcının dışsal kanıt şemasına uygun bir yorum yaptığı düşünülmektedir (Harel & Sowder, 2007). İki numaralı katılımcı ise değerlendirilmesinde ilgili doğrulamayı bir kanıt olarak değerlendirilmiştir. Çünkü ona göre burada “*özel açılara göre değil değişkenlere göre kanıt yapılmış*” ve “*bazı doğru temellere dayanarak çıkarım yapılmıştır.*” Öğretmen adayı bu doğrulamada kullanılan gerekçenin “*daha önce doğrulanmış ve kabul edilmiş bir bilgi*” olduğunu belirtmiştir. Üç numaralı katılımcıya göre verilen doğrulama bir kanıt sayılmamaktadır. Çünkü “*buradaki gerekçenin neden doğru olduğu bilinmemektedir.*” Bu noktada katılımcı “*Bu gerekçenin doğruluğu sorgulanırsa… Nereden biliyoruz iki açının toplamının üçüncünün bütünleyenine eşit olduğunu? Tekrar soru işareti uyandırabilir mesela. Sil baştan veriliyorsa…*” biçiminde düşüncelerini belirtmiştir.

4. Tartışma ve Sonuç

Kanıtın anlamına ilişkin inançlar bağlamında öğretmen adaylarının kanıtı bir problem çözme ve bilginin neden doğru olduğunu açıklama süreci olarak düşündükleri görülürken; kanıtın sahip olması gereken özellikler “genellenebilirlik”, “ikna edicilik” ve “anlaşılabilirlik” temelinde ele alınmıştır. Bunun yanı sıra birinci adayın kanıt yapma ve değerlendirme sürecinde aksiyomatik yapı yerine derslerde daha önce yapılan benzer kanıtlar üzerine akıl yürüttüğü görülmüştür. Aynı katılımcı, kanıtı problem çözme etkinliğiyle benzer olarak düşünmekte ve iki kavram arasında net bir ayrım görmemektedir. Bu inançların temelinde, öğretmen adaylarının kanıta yönelik eksik kavram imajlarının olduğu düşünülmektedir (Moore, 1994). Araştırma sürecinde sadece ikinci katılımcı formel kanıtın tümdengelimli yapısına vurgu yaparken, aynı katılımcının kanıt değerlendirme sürecinde aksiyomatik yapıyı değerlendirmede hatalı bir yaklaşım içinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca katılımcının kanıta yönelik yaklaşımının “genellenebilirlik” temelinde gelişmiş olduğu ve bu nedenle kanıtın özel örneklerle değil, üzerinde çalışılan kümenin elemanlarını temsil eden değişkenlerle yapılması gerektiğini düşündüğü anlaşılmaktadır. Üçüncü katılımcı ise tümdengelimli yapıyı bozan unsurları doğru değerlendirmiş olsa da bilgisayar ortamındaki deneysel türdeki doğrulamaları “anlaşılır” ve “ikna edici” olmaları nedeniyle geçerli kanıt olarak kabul etmiştir. Bu bağlamda daha önceki çalışmalarda da Martin ve Harel (1989) öğretmenlerin tümdengelimli kanıtların yanı sıra deneysel türdeki doğrulamaları da geçerli kanıt olarak kabul ettiklerini gösterirken, Selden ve Selden (2003) de araştırmalarında öğretmen adaylarının bir kanıtı incelerken aksiyomatik yapı dışındaki özelliklere odaklandıklarını ve yanlış değerlendirmeler yaptıklarını ortaya koymuştur. Bu noktada ikinci ve üçüncü öğretmen adayına ilişkin sonuçlar Martin ve Harel (1989) ve Selden ve Selden’ın (2003) sonuçlarıyla örtüşmektedir.

Araştırmada üç öğretmen adayının da kanıt sürecinde önermelerin öncüllerini ve hüküm ifadelerini okurken hatalı yaklaşımlar sergiledikleri gözlenmiştir. Ortaya çıkan bu hatalı yaklaşımların temelinde Moore'un (1994) belirttiği, matematik dilinin ve gösteriminin anlamlandırılamamasının etken olduğu düşünülmektedir. Bu çerçevede, öğretmen adaylarına verilen kanıt öğretiminde formel ve informel türdeki kanıtların anlamlarının, matematik dilini kullanma becerilerinin ve kanıt ile problem çözme arasındaki ayrımın katılımcılara yeterince kazandırılamadığı anlaşılmaktadır.

Araştırmaya katılan üç öğretmen adayı da kanıt yapma sürecinde kendilerini yeterli düzeyde görmemektedirler. Birinci ve üçüncü aday bunun nedenini derslerde kendilerine hazır olarak sunulan kanıtlardaki çözüm yollarını ezberlemeleri ve yeni kanıt yapma süreçlerinde de sürekli önceki kanıtları düşünmeleri olarak açıklamışlardır. Bu görüşler öğretmen adaylarının kanıt yapma ve değerlendirme süreçlerindeki hatalı yaklaşımlarının nedenlerine yönelik ipuçları sunmaktadır. Buna göre öğretmen adayları kendilerine verilen teoremin öncülleri üzerinde akıl yürütmeden önce, bazı kanıt yöntemlerini ezbere şekilde kullanma eğilimi göstermektedirler. Ayrıca örnek kanıtları değerlendirme sürecinde adayların bu tür kanıtların derslerde benzer şekilde yapılıp yapılmadığını düşünmesi de değerlendirmenin belli ritüelleri ve otoriter gerekçeleri temele aldığını göstermektedir. Bu gösterge ise, öğretmen adaylarının kanıt yapma ve değerlendirme sürecinde izledikleri yaklaşımların dışsal kanıt şemasını yansıttığına işaret etmektedir (Harel & Sowder, 1998). Bu sonucun gerekçesi olarak, alan derslerinde tanım – teorem – kanıt sırasını takip eden ve öğretmen merkezli olarak yapılan kanıt öğrenimlerinin öğretmen adaylarına akıl yürütmeden çok ezberleme alışkanlığı kazandırmış olabileceği düşünülmektedir (De Villiers, 2003; Güven ve Karataş, 2005; NCTM, 2000).

Elde edilen sonuçlar ışığında ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine ilişkin inançlarının eksik temellere dayandığı görülmektedir. Bunun yanı sıra öğretmen adayları bu eksik temellerin farkında oldukları için kendi kanıt yapma becerilerine ilişkin inançları da güçlü değildir. Bu inançlardaki yetersizlik, öğretmen adaylarının kanıt yapma ve değerlendirme süreçlerindeki düşünce yapılarını etkilemekte ve hatalı yaklaşımların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Öğretmen adaylarının almış oldukları geleneksel kanıt öğreniminin bu sonucun başlıca nedeni olduğu düşünülmekle birlikte, eğitimcilere ve araştırmacılara bu bağlamda bazı öneriler getirilmiştir.

5. Öneriler

Araştırmanın sonuçlarından yola çıkarak matematik eğitimcilerine ve araştırmacılara bazı öneriler sunulmuştur.

Öğretmen yetiştirme programlarındaki kanıt öğretiminde öğretmen merkezli olarak sunulan kanıtlar yerine öğrencilerin aktif olarak argümantasyon sürecine girdikleri, kanıtlarını savundukları, eleştirdikleri ve karşıt argüman sundukları bir öğrenme sürecinin öğretmen adaylarının kanıtın anlamını daha iyi kavramalarını sağlayacağı düşünülmektedir.

İki numaralı katılımcının görüşlerine göre kanıt öğretiminin üniversite düzeyinde bir anda başlaması kanıta ilişkin bir alt yapı eksikliğinin ortaya çıkmasına yol açmaktadır. Buradan hareketle, ilköğretimden ortaöğretime kadar muhakeme ve kanıt becerilerinin gelişimi amacıyla öğrencilerin problem durumları üzerinde tartıştıkları, çıkarım ve genelleme yaptıkları, çıkarımlarını matematiksel gerekçelerle savundukları, tanımları kullanarak tümdengelimli muhakeme yaptıkları bir öğretimin formel kanıta yönelik sağlam bir alt yapının oluşmasını sağlayacağı düşünülmektedir.

Çalışmadan çıkan bir başka sonuca göre, alan derslerinde ölçüm araçlarının ve görsel manipülatiflerin kanıta ilişkin rolü üzerinde durulmamasının öğretmen adaylarının bu araçlarla yapılan doğrulamaları kanıt için yeterli görmelerine yol açtığı tahmin edilmektedir. Bu nedenle kanıt öğretiminde görsel araçların kullanıldığı etkinliklerin ardından aksiyomatik açıklamaların istenmesi ve formel çıkarımların yapılması öğrencilerin kanıtın formel yapısını daha iyi anlamalarını sağlayacağı düşünülmektedir.

Yapılan araştırmada öğretmen adayları doğrudan kanıt yöntemiyle kanıtlar yazmış ve bu türdeki kanıt örneklerini değerlendirmişlerdir. Sonraki araştırmalarda aksine örnek verme, olmayana ergi, tümevarım gibi farklı yöntemleri içeren kanıtların yapılmasına ve değerlendirilmesine odaklanılarak öğretmen adaylarının bu yöntemlere ilişkin yeterlikleri de incelenebilir.

Research of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Beliefs in Proof, Proving Processes and Proof Evaluation Processes

Extended Abstract

In order to develop the mathematical reasoning and proving skills of all students from every education grade ranging from elementary school to high school, it is important that teachers should have the right belief about the meaning of proving and should be able to put forward a formal proof and to evaluate the factors damaging the formal structure of a proof. In this respect, the question of to what extent pre-service teachers have these competencies constitutes the research problem in the present study. The sub-research problems were: (1) What are elementary school mathematics pre-service teachers' beliefs regarding the meaning of mathematical proof and its features? (2) What are pre-service teachers' beliefs regarding their competencies in proving? (3) What are pre-service teachers' ways of reasoning in the process of proving? (4) How do pre-service teachers evaluate the validity of the proof samples?

In the study, the qualitative research method was used to collect, analyze and interpret the research data. The participants of the study were three pre-service teachers who were senior students attending the Department of Elementary School Mathematics Teaching at a state university in the Middle Anatolian Region of Turkey. The participants in the study were selected among the pre-service teachers who had taken the courses of Abstract Mathematics, Introduction to Algebra and Elementary Number Theory, which included the formal proof subjects. In order to collect the data, the semi-structured interview and clinical interview techniques were applied. In the first phase of the study, semi-structured interviews were held with the pre-service teachers to determine their beliefs in the meaning of proof, in its features and in themselves in proving. In the second phase, their reasoning processes while proving the Euclid Theorem were examined with the clinical interview technique. In the third phase, the clinical interviews revealed how the pre-service teachers evaluated the verifications of the fact that the total measurement of internal angles of a triangle is 180^0. In the third phase of the study, the students were presented with axiomatically false verification and computer based experimental verification including computer manipulatives. While proving a theorem in axiomatically false verification, a theorem following after this theorem in axiomatic hierarchy is used as a warrant for justification. For the analysis of the data, Miles and Huberman's three-phase qualitative data analysis method was used. This method of analysis includes the phases of "data reduction", "data display" and "conclusion drawing/verification."

The research findings demonstrated that the participants regarded proving as the process of problem solving, the procedure for problem solving and the process of investigating the source of information. In addition, it was found out that the participants considered the features of proof to be persuasive, deductive and comprehensible. Also, it was seen that the participants found their own competencies in proving to be inefficient because they reported

that they memorized the previous proofs; that they did not have any knowledge about proof before their university education; that they failed to use mathematical language; that their reasoning skills were not efficient; and that they did not think abstractly. Besides this, the participants stated that they examined the conditions of the theorem before proving; that they revised the previous proofs; and that they immediately tended to use the inductive proof method. It was also seen in the process of proving for the Euclid Theorem that the participants made certain mistakes. These mistakes included regarding the expression of conclusion in the mathematical proposition as an expression of condition, drawing further for no purpose, using strategies by heart (inductive proving method) and failing to establish relationships between mathematical expressions. Lastly, in the process of proof evaluation, two of the participants regarded the computer based experimental verification as a valid formal proof, and one participant was indecisive. On the other hand, two of the participants considered the false verification to be axiomatically valid and reported as the reason for this consideration that "this is always done in this way in class", "warrant used is correct", "variables are used instead of specific examples."

In the light of the findings obtained, it is seen that elementary school mathematics pre-service teachers' beliefs regarding the meaning of mathematical proof and its features do not depend on strong bases. In addition, as they are aware of these poor bases, preservice teachers do not have strong beliefs regarding their own competencies in proving. These weak beliefs of pre-service teachers have influence on the processes of proving and evaluation and lead to false approaches. It is believed that this is basically a result of the traditional proof education given to pre-service teachers.

Kaynaklar/References

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90,* 449-469.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp. 216-230). London: Hodder & Stoughton.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

De Villiers M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad 4*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Dean, E.E. (1996). Teaching the Proof Process, *College Teaching*, *44*(2), 52-55.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi (Journal of Research in Education and Teaching), 2*(1), 231 – 240.

Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *FOCUS-on Learning Problems in Mathematics, 14*(4), 31 – 55.

Even, R. (1990). Subject-matter knowledge for teaching and the case of functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14,* 293 - 305.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 66*, 131 – 143.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2005). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile oluşturmacı öğrenme ortamı tasarımı: Bir model, *İlköğretim-Online, 4*(1), 62-72.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp. 234 - 283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age Inc., and National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 379-405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 61-88.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2005). What happens when teachers design educational technology? The development of technological pedagogical content knowledge. *Journal of Educational Computing Research*, *32*(2), 131–152.

Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies- International Periodical For The Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 8*(12), 765 – 776.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41 – 51.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1984). *Qualitative data analysis: A source book of new methods.* London: SAGE Publications.

Mingus, T. T. Y., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics, 99*(8), 438-444.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 249-266.

Morselli. F. (2008). High school pre-service teachers' beliefs about proof: some reflections for & from a training course. *International Journal of Human and Social Sciences, 5*(7). http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/MORSEL.pdf adresinden 13 Ağustos 2013 tarihinde erişilmiştir.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Özdemir, M. (2010). Nitel veri analizi: Sosyal bilimlerde yöntembilim sorunsalı üzerine bir çalışma, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *11*(1), 323 – 343.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006, Kasım). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. *Proceedings of the 2006 Meeting of PME-NA*, Yucatan, Mexico.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers* (Unpublished doctoral dissertation). The University of Texas at Austin, Austin.

Kaynak Gösterme

Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(2), 137-157.

Citation Information

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2014). Research of pre-service elementary mathematics teachers' beliefs in proof, proving processes and proof evaluation processes. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5*(2), 137-157.