The Examination of Conceptual and Procedural Understanding Processes of Eighth Grade Students in the Subjects of Identities and Factoring [*]

İnci Ünlüer[a] and Aytaç Kurtuluş[b]

[a]Ministry of National Education, Beykoz Koç Middle School, İstanbul/Turkey (ORCID: 0000-0002-6775-9383)
[b]Eskişehir Osmangazi University, Education Faculty, Eskişehir/Turkey (ORCID: 0000-0003-2397-3510)

Article History: Received: 4 March 2020; Accepted: 31 October 2020; Published online: 9 January 2021

Abstract: The aim of this study is to examine the conceptual and procedural understanding processes of eighth grade students through syllabi based on 5E Learning Cycle for the subjects of identities and factoring. In this qualitative research, the teaching experiment model was used. The research was carried out with 20 students studying in a public secondary school in Istanbul. The levels of mathematical success of these students were, high, medium and low, and thus were heterogeneous. A readiness test was applied to determine the prior knowledge and skills of students about identities and factoring. According to the data obtained from this test, three different syllabi were designed and implemented to examine students' conceptual and procedural understanding processes for identities and factoring. During the 12-hour teaching experiment, data were collected via researcher's observation notes, readiness test, activity handouts and worksheets. The data were analyzed using descriptive analysis technique. According to the results of the readiness test, students could adequately express their procedural knowledge about algebraic expressions in 6th and 7th grades; however, it was inferred that their conceptual knowledge wasn't complete. Furthermore, evaluations were made during the syllabi which were prepared within the scope of the 5E Learning Cycle. According to the data obtained from these evaluations, students were able to express the concept of identity, which is one of the learning outcomes of identities and factoring, in terms of both conceptual and procedural knowledge. However, it was observed that they were not able to completely achieve procedural and conceptual understanding of the identity $(a - b)^2$, and procedural understanding of the identity $a^2 - b^2$.

Keywords: Conceptual understanding, procedural understanding, algebra, identity, 5E learning cycle

DOI:10.16949/turkbilmat.698535

Öz: Bu araştırmada amaç, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik, 5E öğretim modeline dayalı hazırlanan ders planları ile sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal ve işlemsel anlama süreçlerini incelemektir. Nitel araştırma desenine sahip olan bu çalışmada, öğretim deneyi modeli kullanılmıştır. Araştırma, İstanbul ilinde bulunan bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 20 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Bu öğrencilerin matematik başarı düzeyleri yüksek, orta ve düşük olmak üzere heterojen bir yapıdadır. Öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik ön bilgi ve becerilerini belirlemek için hazırbulunuşluk testi uygulanmıştır. Bu testten elde edilen verilere göre özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama süreçlerini incelenmek amacıyla üç farklı ders planı tasarlanmış ve uygulanmıştır. 12 ders saati süren öğretim deneyi sürecinde araştırmacının gözlem notları, hazırbulunuşluk testi, etkinlik kağıtları ve çalışma yaprakları ile veriler toplanmıştır. Veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Hazırbulunuşluk testinden, öğrencilerin 6. ve 7. sınıfta gördükleri cebirsel ifadeler konusuna yönelik işlemsel bilgilerini yeterli şekilde ifade edebildikleri; ancak kavramsal bilgilerinde eksiklikler olduğu belirlenmiştir. 5E öğretim modeli kapsamında hazırlanan ders planları süresince yapılan değerlendirmelerden elde edilen verilere göre, öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun alt kazanımlarından özdeşlik kavramını hem kavramsal hem de işlemsel bilgi anlamında ifade edebildikleri, $(a\text{-}b)^2$ özdeşliğini işlemsel ve kavramsal anlamalarında, $a^2\text{-}b^2$ özdeşliğini ise işlemsel anlamalarında eksiklikleri olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kavramsal anlama, işlemsel anlama, cebir, özdeşlik, 5E öğrenme modeli

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

The role of education in our age is more based on the extent to which knowledge is meaningful and practical in real life for a student rather than measuring how much a student learned. In innovative educational environments, the more favored ones are those in which students' role is not only to learn but also to interpret, question and analyze processes, and in which they can learn by themselves. Through the change in the revised curriculum (Republic of Turkey Ministry of National Education, 2009), the focus was shifted on a structure that favors not only the student-centered and procedural knowledge but also conceptual knowledge. With this perspective, students should not learn by memorizing and they should be given the chance to thoroughly understand a subject. Conceptual knowledge and procedural knowledge, which are needed to obtain this skill and

Corresponding Author: Aytaç Kurtuluş **email:** agunaydi@ogu.edu.tr

[*]This study is a part of the first author's master's thesis which has been developed as a part of the project 2201721A128 and published, and the thesis advisor is the second author.

Citation Information: Ünlüer, İ. & Kurtuluş, A. (2021). The Examination of Conceptual and Procedural Understanding Processes of Eighth Grade Students in the Subjects of Identities and Factoring. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 13*(1), 22-70. http://doi.org/10.16949/turkbilmat.698535

to put it to use in real life, were brought to attention by Hiebert and Lefevre (1986), and these types of knowledge have been accepted as the basic types of knowledge by researchers and teachers. Thus, conceptual and procedural knowledge have been seen as two of the most important research topics in the field of education.

1.1. Conceptual and Procedural Knowledge

A subject can be thoroughly learned by creating a meaningful relationship between conceptual and procedural knowledge (Delice & Sevimli, 2010). This is the only way to gain proficiency in mathematics. Therefore, mathematical knowledge needs to be supported in terms of conceptual and procedural knowledge in order to become useful. It is not always possible to separate conceptual and procedural knowledge which can be seen as two points on a continuum (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). According to this opinion, it can be predicted that the bi-directional relationship between conceptual and procedural knowledge creates interactions between the two in time, and consequently they support each other (Rittle-Johnson and Schneider, 2015). In this respect, it is essential to balance mathematical knowledge of students in terms of both conceptual and procedural knowledge. Figure 1 represents an “iterative model” that shows the development of conceptual and procedural knowledge in students.

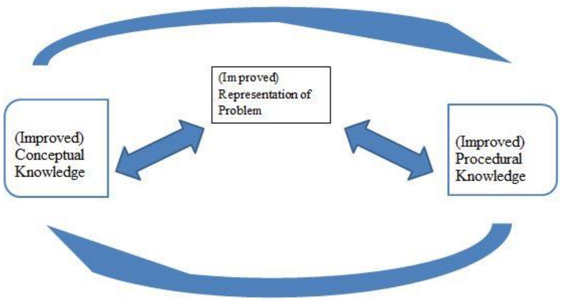


Figure 1. Iterative model for the development of conceptual and procedural knowledge (Rittle-Johnson, Siegler and Alibali, 2001, p. 347)

According to Figure 1, progress in conceptual knowledge affects procedural knowledge positively while enhancement of procedural knowledge allows conceptual knowledge to develop. In Figure 2, the interactions between conceptual and procedural knowledge in the mental processes of a student is given.

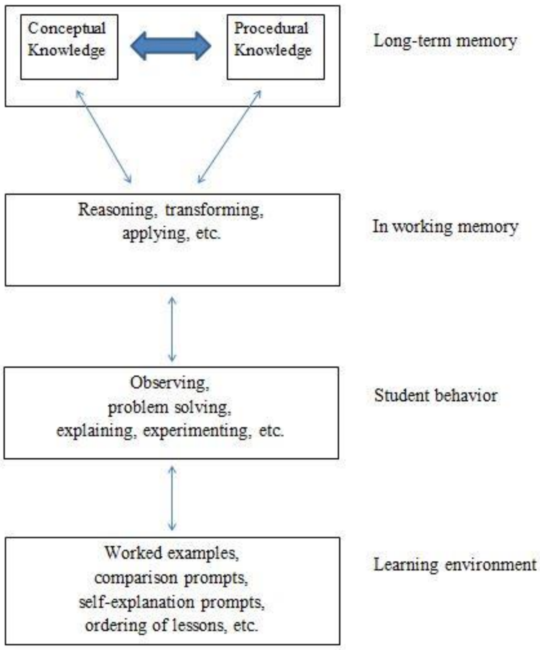


Figure 2. The components of the relations between conceptual and procedural knowledge (Rittle-Johnson and Schneider, 2015, p. 1128).

As given in Figure 2, an important component of learning is memory, and the skills that depend on memory show the correlated structure of conceptual and procedural knowledge during their formation. The formation of these components occurs in a chain-like system. Eventually, knowledge is structured in the long-term memory of the student and enables the student to answer the questions “Why?” and “How?”. Therefore, mathematical knowledge needs to be supported in terms of conceptual and procedural knowledge in order to become useful. Rittle-Johnson and Siegler (1998) infer that there is a positive correlation between students' ability to comprehend mathematical concepts and applying procedures. Thus, the importance of interaction between learning mathematics and conceptual and procedural understanding becomes clear. Therefore, a type of education where conceptual and procedural knowledge is managed together would be more effective and meaningful.

Considering its learning outcomes and aims, the subject field of algebra, which is one of the most basic subject fields of mathematics, can be seen as a field that requires both conceptual and procedural understanding to be managed together in class.

1.2. The Subject Field of Algebra

Baki (2015) summarizes the aim of the subject field of algebra as interpreting the notations of symbols and graphs, making deductions and relating through symbols and graphs, and expressing these deductions and relations with symbols and graphs. Usiskin (1988) explains algebra in a parallel way by arguing that it is a key to define and analyze relations and to classify and understand mathematical structures as well as to solve certain problems. Thus, it forms a basis for students' future algebra experience to utilize these two types of knowledge together in order to understand the subject of algebra which is not only a subject of mathematics but also a way of thinking in daily life. A significant amount of time is given to the subject of algebraic expressions in secondary school mathematics curriculum, and it is the subject where students are introduced to abstraction in mathematics. This subject is dealt with in more detail in each level of education from then on. Thus, it is one of the most important subjects of mathematics.

Lower Secondary School Mathematics Curriculum consists of five subject fields which are Numbers and Operations, Algebra, Geometry and Measuring, Data Processing and Probability. Learning outcomes for the subject field of algebra first shows itself in the 6^{th} grade. It is aimed that 6^{th} grade students find the asked term by using number patterns, interpret variables and algebraic expressions, do addition and subtraction with algebraic expressions, and multiply a natural number with an algebraic expression. It is aimed that 7^{th} grade students understand the concepts of identity and equation, and solve first-degree equations in one unknown and related problems. In 8^{th} grade, students are expected to interpret equations and identities, and factor algebraic expressions. Examining the linear relation between two variables, solving equations and examining inequalities in one unknown are also included (Republic of Turkey Ministry of National Education, 2013). As given in the mathematics curriculum, the concept of identities and the subject of factoring are first taught in 8^{th} grade.

Relations, formulas and applications that are used for the subject of identities in 8^{th} grade are not much related to the real life. Furthermore, students' learning is far from conceptual understanding in classes where teachers make students memorize the formulas for identities. On the other hand, in the mathematics curriculum (2018) it is stated that teachers should use concrete materials and various models as much as possible while teaching a new concept and evaluating. Thus, conceptual understanding of identities can be achieved by revealing the relation between algebra and geometry through models and by dealing with these two subject fields as a whole. In the mathematics curriculum (2018), it is emphasized that when applicable one should link the learning outcomes of algebra to those of other subject fields while teaching the learning outcomes of algebra. Therefore, interpreting the subject field of algebra by dealing with it in a concrete environment has a significant role in making students literate in mathematics, which is one of the goals of mathematics education, and in enabling them to gain the skill of algebraic thinking.

Modeling identities with algebra tiles and geometrically interpreting the relations enable students to form the knowledge in an active learning environment. This is one of the most basic components of constructivist approach to learning. In constructivist approach to learning, student is the center of the curriculum, and the learning objectives are aimed for high-level skills while a process-based learning plan is made (Koç, 2002). Koç further explains this by saying that the content should be related to the interests of students and real life while the learning, teaching and evaluation activities are completed, applied and evaluated together with students (2002). The 5E Learning Cycle is one of the learning models that are most suitable for the constructivist approach, and it is one of the most effective models that can be applied in such learning environments.

The 5E learning cycle enables students to discover new concepts by using their prior knowledge and enables them to relate these concepts to their prior knowledge. Thanks to the learning and teaching activities applied during classes, students thoroughly understand new concepts and learn about a certain problem situation by themselves. Thus, the 5E learning cycle is an approach to learning where the course is planned in phases (Kaymakçı, 2015). The 5E learning cycle is a model in the form of a cycle. It is named after the initials of each phase. These phases consist of engagement, exploration, explanation, elaboration and evaluation (Demir, 2018).

In recent years, a considerable amount of research that is aimed for secondary school students in the subject field of algebra has been conducted and is still being conducted. The results of the research show that although many regulations have been made in curricula in terms of teaching algebra, students still experience some problems in the subject field of algebra and they cannot successfully complete certain basic tasks such as interpreting an algebraic expression, forming relations between algebraic expressions, knowing what the concept "variable" means, forming identities, and as a result they have conceptual fallacies (Erdem & Aktaş, 2018; Macgregor & Stacey, 1997; Övez & Çınar, 2018; Şahiner, 2018; Şimşek, 2018; Ulaş, 2015; Yıldız, Çiftçi, Akar, & Sezer, 2015). On the other hand, in some studies students were able to use their procedural skills by applying the necessary rules and formulas on algebraic expressions and identities, but they could not explain these procedures conceptually (Baki & Kartal, 2004; Bekdemir, Okur, & Gelen, 2010; Karaaslan & Ay, 2017; Sarı, 2012). However, researchers detect that in learning environments where conceptual and procedural knowledge are supported and managed together, students can complete the tasks successfully, and permanent learning is achieved (Delice & Sevimli, 2010; Orhan, 2013; Örmeci, 2012; Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001; Rittle-Johnson & Koedinger 2009; Taştepe, 2018; Yazır, 2015).

As a result of the type of learning where conceptual and procedural understanding are constructed together, to research the effects of them on students' success in algebra can give insight about the power of this success for the future mathematical success. This study explains how eighth grade students' conceptual and procedural understanding are formed in classes where 5E learning cycle is applied while teaching the subjects of identities and factoring. Moreover, it presents activities that mathematics teachers can use in algebra classes, and these activities are aimed at the needs of students in these classes.

The aim of this research is to examine the conceptual and procedural understanding processes of eighth grade students in the subjects of identities and factoring through a teaching experiment based on 5E learning cycle.

Thus, the answers to the questions of ''Do students have the prior knowledge required for achieving conceptual and procedural understanding of the subjects of identities and factoring?'' and ''How do students proceed with 5E learning cycle in the subjects of identities and factoring in terms of conceptual and procedural understanding?'' are sought.

2. Methodology

In order to do an in-depth examination of the conceptual and procedural understanding processes of the eighth grade students in the subjects of identities and factoring, a process-based approach is required. Therefore, a teaching experiment was used because it was more suitable for the aim of the research. Steffe and Thompson (2000) describe a teaching experiment as a conceptual means that researchers use to organize their activities and as a living methodology which is designed to research and explain the mathematical activity of students. The main goal of using a teaching experiment in a study is to enable the researcher to understand mathematical concepts and procedures created by students by experiencing students' ways of learning mathematics and their reasoning skills (Steffe and Thompson, 2000). Also, the methodology of teaching experiment can be defined in terms of three central aspects in the context of developmental research which are designing and planning the teaching, applying in-class activities and the retrospective analysis of all the data collected throughout the teaching experiment (Cobb, 2000).

The most basic issue in conducting a teaching experiment is to make the actions and interactions involved in the experiment reveal how a researcher should act and which questions he/she needs to ask in an unexpected situation (Steffe & Thompson, 2000). Thus, a teacher (a researcher) has a significant role in a teaching experiment. During a teaching experiment, teachers act in terms of the social context of the classroom and they are highly effective in supporting their students in their mathematical development by interacting with them (Cobb, 2000). The aim of the researchers is to examine students' reasoning skills by interacting with them responsively and intuitively (Steffe & Thompson, 2000). Researchers should keep expressing the underlying meaning of what students say and do so that the researchers can become more experienced under the guidance of students as the teaching experiment proceeds (Steffe & Thompson, 2000).

In this study, likewise, it is aimed to examine the way students think and their conceptual and procedural knowledge of the subjects of identities and factoring by evaluating and interpreting the data collected. The teaching experiment method is used since it is designed to enhance the learning process of students and to enable the application of the syllabi.

2.1. Participants

The experimental group consists of 20 eighth grade students from a lower secondary school in Istanbul during 2017-2018 educational year. The reason for this group to be chosen is that the aimed learning outcomes are included in eighth grade and the students have heterogeneous levels of academic success. More importantly, the researcher has been teaching mathematics to them since fifth grade, which means that the researcher saw and experienced the difficulties students faced in the subject field of algebra.

In the results section of the research, each student is given a number for the sake of the group's privacy, and the students' levels of success were determined based on their grades in mathematics in 5^{th}, 6^{th} and 7^{th} grade. These levels are given in Table 1 with the determined student numbers.

Table 1. Students Numbers with Respect to Their Levels of Success

Level of Success	Student Number
High Level of Success	S1, S2, S3, S10, S12, S15
Medium Level of Success	S5, S6, S7, S9, S13, S14, S16, S19, S20
Low Level of Success	S4, S8, S11, S17, S18

It can be seen in Table 1 that students' levels of success are distributed heterogeneously.

2.2. Means of Collecting Data

The researcher's observation notes, diaries, the readiness test, activity handouts and worksheets included in the syllabi were used during the research.

The readiness test was prepared in order to know the prior knowledge of the students about the subjects of algebraic expressions, identities and factoring which were included in the eighth grade curriculum and to form syllabi that were appropriate for the 5E model and what students knew. While preparing the test, learning outcomes of the subject of algebra that were included in 6^{th} and 7^{th} grade secondary school mathematics curricula were taken into consideration. The questions were aimed at the basic concepts about the subject and the application of these concepts, and they were able to assess the conceptual and procedural knowledge and skills of the students. In order to validate the test, the questions were written according to the textbooks, books about the subject, question banks and the experience of the researcher. Then, they were reviewed by a subject field expert and a mathematics teacher. For the authenticity of the test, first it was used in a pilot scheme. Then, the questions were reviewed and those that had semantical mistakes, problems in their structure of premise, etc. were corrected and the test was renewed. There were 16 open-ended questions in total in the test. There were 5 conceptual questions about the learning outcome "Students can write an appropriate algebraic expression for a given verbal condition, and a verbal condition appropriate for a given algebraic expression" which is the first learning outcome of the subject of algebraic expressions in the 6^{th} grade, 1 procedural one about the learning outcome "Students can calculate the value of an algebraic expression for the possible natural number values of the variable", 1 conceptual one about the learning outcome "Students can explain the meaning of simple algebraic expressions", 2 conceptual and 1 procedural one about the learning outcome "Students can do additions and subtractions with algebraic expressions" which is one of the first learning outcomes of the 7^{th} grade, 1 conceptual and 1 procedural one for each of the learning outcomes "Students can multiply a natural number with an algebraic expression", "Students can express the rule of a number pattern with letters and can find the asked term of the pattern the rule of which is given in letters" and "Students understand the principles of addition, subtraction, multiplication and division properties of equality".

The prepared syllabi were appropriate for the 5E learning cycle. Syllabus 1 included the learning outcome "Students understand simple algebraic expressions and can paraphrase them", syllabus 2 included the learning outcome "Students can multiply algebraic expressions and can factor them by using the grouping method" and syllabus 3 included the learning outcome "Students can explain identities via models and can factor them". These syllabi were also first used in a pilot scheme, and due to some mistakes they were corrected by revising the activities in the syllabi and the questions in the worksheets. However, due to the nature of the experiment, the probability of making changes in the syllabi was always kept in mind throughout the application of it in case any event in the experiment might have required it. The activity handouts and worksheets included in the syllabi involved questions and activities that students could apply to new situations as these questions enabled them to think, question and interpret, and as they made the students experience the learning outcomes in terms of conceptual and procedural understanding. Questions, activities and various resources were examined and edited according to the needs of the experimental group. They were revised in accordance with conceptual and procedural understanding and examined by teaching specialists of the subject field. Then, their validity and authenticity were proven through a pilot scheme.

2.3. Analysis of the Data

Because the questions in the readiness test were open-ended, how the students solved the questions, which mathematical information they used, the procedures, drawings, comments and solutions were examined. Thus, the researcher learned about the students' prior knowledge that enabled them to conceptually and procedurally understand the subjects of identities and factoring. Syllabi 1 and 2 were prepared according to this data. Syllabus 3 was prepared for the students who didn't have any problems in terms of syllabi 1 and 2, and it was based on the subjects of identities and factoring. Data was collected from the observations made during practices in the experiment, activity handouts of the students, worksheets, diaries and notes of the researcher. Then, this data was examined carefully on the basis of descriptive analysis and in terms of the students' conceptual and procedural understanding of the learning outcomes.

How to evaluate conceptual/procedural understanding and the relations between conceptual and procedural knowledge is highly important in terms of the interpretation and analysis of the results because these two types of knowledge can develop as an inseparable whole. While procedural knowledge involves the criteria of going through basic procedures step by step according to certain rules, formulas and algorithms, and of using prior mathematical knowledge in the knowledge level, conceptual knowledge involves knowing the meaning of basic concepts and giving examples, transitioning between representations and realizing relations between concepts, interpreting questions by approaching to them as a whole and evaluating the given answers, which require a more comprehensive and detailed evaluation (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Therefore, in the section where the results were described, students' answers and dialogs that took place in that moment were directly given in order to exemplify the conceptual understanding and procedural knowledge and skills of the students. The dialogs were recorded by the observer by taking notes without interrupting the class, and the observations made during the class were written in a diary right after the class. Then, the results, the way conceptual and procedural understanding were achieved and the relations in between were evaluated and interpreted.

2.4. The Process

The teaching experiment took 12 hours and consisted of the readiness test and three different syllabi. First of all, the answers to the readiness test, which was prepared according to the learning outcomes of the subject field of algebra included in the 6th and 7th grade secondary school mathematics curricula, and the review of literature in the subject field were examined. Then, what the students did wrong or didn't know was detected, and data about the conceptual and procedural knowledge of the students about the subject was collected. Using this data, the researcher prepared activities and worksheets which were applied in the engagement, exploration, explanation, elaboration and evaluation phases of the syllabi. These syllabi were appropriate for the 5E learning cycle that enabled managing conceptual and procedural understanding together. The aforementioned activities aimed to blend the procedural skills of the students with the knowledge they formed by making them first explore the subject conceptually. On the other hand, worksheets aimed to observe how the students apply the constructed conceptual and procedural knowledge in new situations. Three syllabi were prepared, and they included the learning outcomes of the subjects of algebraic expressions, identities and factoring. The learning outcomes given the syllabi according to this and how many class hours they took are shown in Table 2.

Table 2. Learning Outcomes Given in the Syllabi and the Class Hours

	Syllabus 1	**Syllabus 2**		**Syllabus 3**			
The Learning Outcome	Students understand simple algebraic expressions and paraphrase them.	Students can multiply algebraic expressions.	Students can factor algebraic expressions through the grouping method.	Students can explain identities using models.	Students can factor similar forms of the expression $a^2 + 2ab + b^2$.	Students can factor similar forms of the expression $a^2 - 2ab + b^2$.	Students can factor similar forms of the expression $a^2 - b^2$.
Class hours	2 class hours	1 class hour	1 class hour	2 class hours	2 class hours	2 class hours	1 class hour

Syllabus 1, which was prepared according to the given syllabi and hours, and for the learning outcome "Students understand simple algebraic expressions and paraphrase them", is shown in Figure 3.

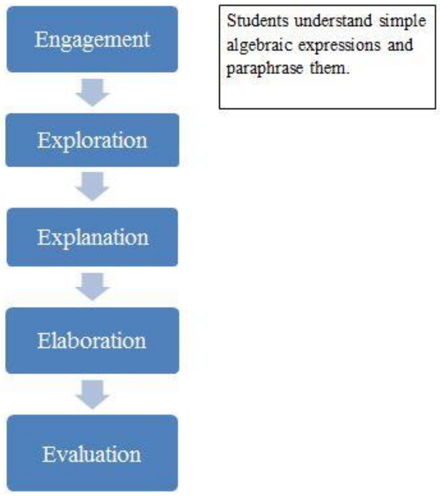


Figure 3. Syllabus 1

In the engagement phase, students were asked to write algebraic expression for various verbal expressions. In this phase, they were given the clue that the letters used in algebraic expressions represented numbers, and when these letters were replaced with different numbers the result changed and that these letters were variables. In the exploration phase, they were asked to find the term, coefficient and constant by editing the given algebraic expressions. In the phases of elaboration and evaluation, the students were asked questions that urged them to interpret simple algebraic expressions and paraphrase the given expressions. During the pilot scheme of this syllabus, it was realized that the activities of elaboration and evaluation repeated each other. Thus, after consulting an expert, it was decided to do a common evaluation in other syllabi after all of the learning outcomes of the syllabi were completed and before beginning the evaluation phase in order to save time. Syllabus 2 is given in Figure 4.

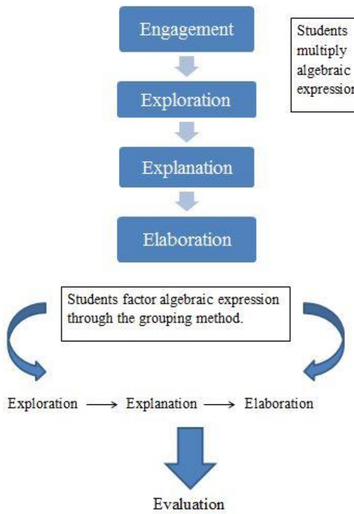


Figure 4. Syllabus 2

Students were asked to find the areas of different plane shapes in the engagement phase of Syllabus 2. In this phase, the focus was on the multiplication of algebraic expressions and the concept of factor. Then, the experiment continued with working on exploring, explaining and elaborating the learning outcome “Students can multiply algebraic expressions”. The elaboration phase of this part was also applied as the exploration phase for the learning outcome “Students can factor algebraic expressions through the grouping method” and the experiment continued with the phases of explanation and elaboration. In the exploration, explanation and elaboration phases, some practices were done by using algebra tiles. During these practices, they worked with teaching materials with which they were unfamiliar, and they got used to working with algebra tiles. Then, there was a common evaluation session for the two learning outcomes. After that, the experiment moved on to the third syllabus which included the subjects of identities and factoring. Syllabus 3 is given in Figure 5.

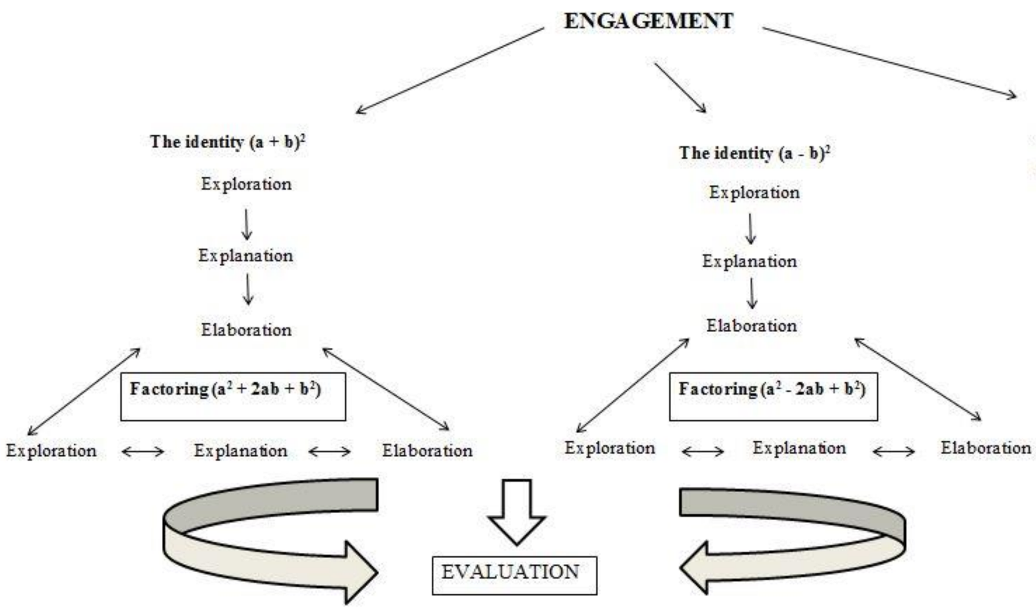


Figure 5. Syllabus 3

While preparing Syllabus 3, the flexible structure of the curriculum was utilized. Each identity and factoring that identity were taught together. In the engagement phase, students did an activity that emphasized the concept of identity and the difference between an equation and an identity. Then, there were studies of exploration, explanation and elaboration for the identity $(a + b)^2$. In the elaboration phase, the focus was on factoring similar forms of the expression $a^2 + 2ab + b^2$, and this was also applied as the exploration phase for factoring similar forms of the expression $a^2 + 2ab + b^2$. The experiment continued with the explanation and elaboration phases. Then, the evaluation phase was skipped and the exploration phase for the identity $(a - b)^2$ began. Again in the elaboration phase, factors of expressions in the form of $a^2 - 2ab + b^2$ were emphasized, and the phase was applied as the exploration phase for factoring expressions in the form of $a^2 - 2ab + b^2$. The experiment moved on to the explanation and elaboration phases. Again, the evaluation phase was skipped and the exploration, explanation and elaboration phases for the identity $a^2 - b^2$ were applied. In these phases, this identity and factoring it were taught together. At the end of the syllabus, there was a common evaluation phase which included all of the identities and their factoring.

3. Results

Students' prerequisite learning outcomes about identities and factoring were examined on the basis of conceptual and procedural understanding through the readiness test. It was realized that students' answers were more inadequate in the conceptual knowledge questions that required modeling something, interpreting models and making deductions. Except the operational mistakes of a few students, whose success in the course was in lower-medium level, most of the students were more successful in questions that required procedural knowledge and skill. In the following section, the results about the minor issues of the research are explained.

3.1. Results concerning the prior knowledge of the students that is required to achieve conceptual and procedural understanding of the subjects of identities and factoring

The prior knowledge of the students that is required to achieve conceptual and procedural understanding of the subjects of identities and factoring was examined in Syllabus 1 and Syllabus 2.

In Syllabus 1, students who participated in the engagement phase of the learning outcome "Students understand simple algebraic expressions and paraphrase them" were able to write appropriate algebraic expressions for the following verbal expressions: "'I gave 4 times the number of my pencils minus 2 pencils to Gül. How many pencils did I give to Gül?', 'The number of girls in our classroom equals the product of 2 and the number of boys plus 1. How many boys are there?', 'If the number of broken eggs is the sum of one fourth of all the eggs and 5, how many broken eggs are there?', 'How can the square of a number be found?', 'What is the sum of the number of Selma and Seher's books?'. In the exploration phase, students were able to find the term, coefficient and constant, but most of them didn't remember that a constant is also a coefficient. Students were asked to leave this part of the table empty. Then, they were reminded that a constant is also a coefficient in the explanation phase. In the elaboration phase, most of the students were able to write appropriate algebraic expressions for verbal expressions and appropriate verbal expressions for algebraic expressions. Also, they were able to find the terms, coefficients and constants of these algebraic expressions and paraphrase these expressions. In the evaluation phase, students thoroughly finished all of the questions. The solution of the student S11 in the evaluation phase is given in Figure 6.

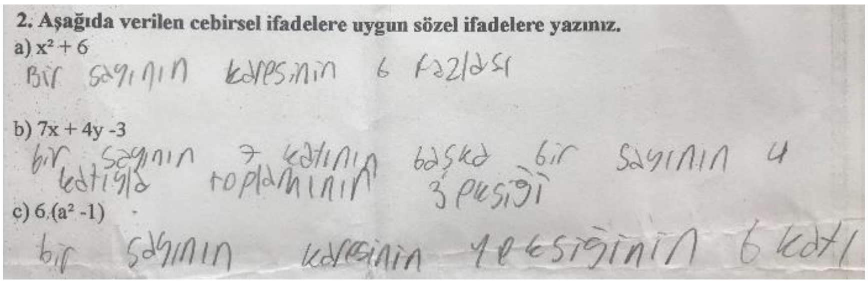
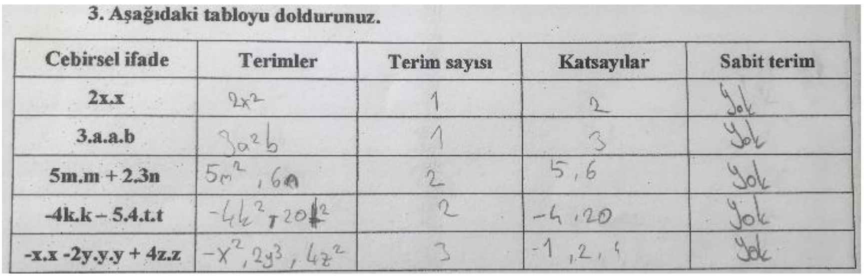

2. Aşağıda verilen cebirsel ifadelere uygun sözel ifadelere yazınız.
a) $x^2 + 6$
Bir sayının karesinin 6 fazlası
b) $7x + 4y - 3$
bir sayının 7 katının başka bir sayının 4 katıyla toplamının 3 eksiği
c) $6.(a^2 - 1)$
bir sayının karesinin 1 eksiğinin 6 katı

Figure 6. The Solution of Student S11 in the Evaluation Phase
(Translation of the answers and the main question that are shown in this figure is given below:
"2. Write appropriate verbal expressions for the given algebraic expressions.
a) 6 plus the square of a number
b)7 times a number, plus 4 times another number, minus 3
c) The product of 6 and the difference of a squared number and 1")

Students understood the concept of variable in terms of conceptual understanding, and they were able to write an appropriate algebraic expression for a verbal expression and an appropriate verbal expression for an algebraic expression. In addition, they were able to find the terms of an algebraic expression based on the addition and subtraction operations between the terms. However, in the elaboration phase it was seen that student S6 wrote $-ab^3$ while rearranging the expression (-a.b) + (-a.b) + (-a.b) in the question that required doing operations between similar terms and that was designed for procedural understanding. In this part, the student's attention was drawn to the additions between the terms and the student was asked to check his/her solution. Then, students who made operational mistakes similar to those of S6 were allowed to correct their mistakes. Eventually, in the evaluation phase all students correctly answered all of the questions that required procedural skills. The solution of student S19 in the evaluation phase is given in Figure 7.


3. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Cebirsel ifade	Terimler	Terim sayısı	Katsayılar	Sabit terim
2x.x	$2x^2$	1	2	Yok
3.a.a.b	$3a^2b$	1	3	Yok
5m.m + 2.3n	$5m^2$, 6n	2	5, 6	Yok
-4k.k – 5.4.t.t	$-4k^2$, $20t^2$	2	-4, 20	Yok
-x.x -2y.y.y + 4z.z	$-x^2$, $2y^3$, $4z^2$	3	-1, 2, 4	Yok

Figure 7. The Solution of Student S19 in the Evaluation Phase

Throughout this process, it was observed that students achieved procedural understanding of the subject by doing arithmetical operations between similar terms and paraphrasing algebraic expressions. Furthermore, thanks to the 5E learning cycle, it can be said that students were given the chance to experience the learning outcomes in a way that conceptual and procedural understanding supports each other.

In the engagement phase, which was prepared for the learning outcomes "Students can multiply algebraic expressions." and "Students can factor algebraic expressions through the grouping method.", of the Syllabus 2, students were introduced to the topic through an activity about multiplying two algebraic expressions by using the area formula of a rectangle. It was seen that students were able to easily multiply two algebraic expressions by using the area formula of a rectangle in this activity.

In the exploration activity, it was aimed to make students understand the distributive property of multiplication over addition and subtraction on different examples by using the area formulas of rectangular fields before moving on to the subject of multiplying algebraic expressions. The solution of student S7 in this phase is given in Figure 8.

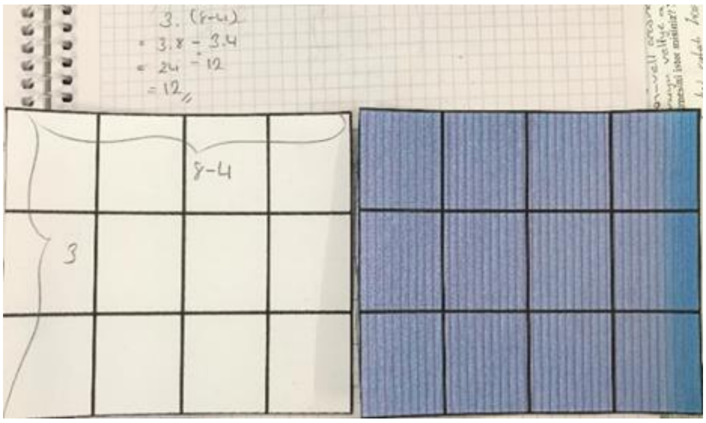


Figure 8. The Solution of Student S7 in the Exploration Phase

Because students had been taught about the distributive property in early years, it was observed that they didn't have any difficulties in this activity thanks to their prior knowledge. Students of lower levels of success and who had trouble with the preparatory practice also remembered the distributive property.

Again as an exploration activity, in order for students to conceptually understand the multiplication of algebraic expressions by modeling with algebra tiles, each student was first distributed algebra tiles to gain some experience in making models and they were given information about the areas and the lengths of the sides. Multiplication of algebraic expressions was explained by modeling different forms of the operations 2.(x + 3), x.(x + 2), (x + 3).(2x - 1) with algebra tiles. This phase continued in Q&A format. Students were asked to model, and they were asked questions in order to learn their opinions and comments. Thus, conceptual understanding of the learning outcome could be achieved in a way that supports procedural understanding. The dialog between the researcher and students about modeling the expression (x + 3).(2x - 1) is as follows:

A: Now, let's choose the algebra tiles that we need and determine the sides of the rectangle.
S4: The sides should be (x + 3) and (2x - 1). (Most of the students were able to say this)
S10: We can choose one tile with area of x^2 and three tiles with area of x. This side is (x + 3).
S17: We put another tile with area of x^2 below this and we get 2x.
S6: And at the bottom, we put this. This side of it is -1 (shows the tile representing the negative and the width of which is -1).

After the first two multiplications, students could model the given multiplication as the area of a rectangle. They were able to find the area both conceptually by summing the areas of the pieces they used and procedurally by applying the distributive property to the expression (x + 3).(2x - 1), and they could show that the two results were equal. After the remarks of the students, the model was repeated and it was emphasized by drawing attention to the negative algebra tiles. Then, the session moved on to the elaboration phase after teaching about the distributive property over addition or subtraction again.

In the elaboration phase, students were distributed algebra tiles and asked to model the multiplication of the given algebraic expressions using the algebra tiles and to write algebraic expressions that were suitable for the given model. In this phase, the solution of student S20 for the question given in part b is shown in Figure 9.

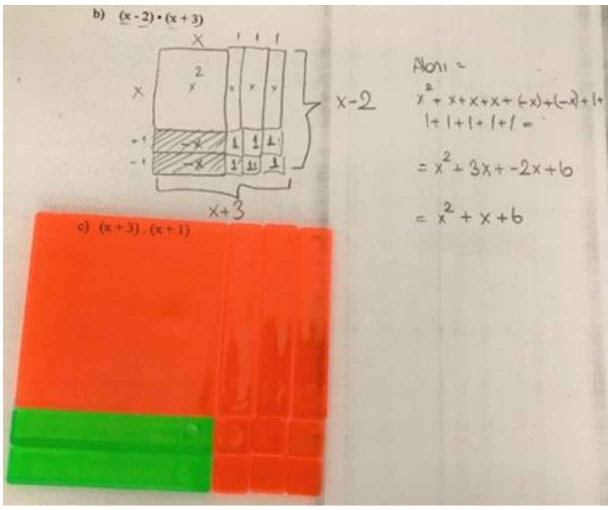


Figure 9. The Solution of Student S20 for the Question Given in Part b

As shown in Figure 9, S20 first formed the model by using algebra tiles, and then drew a representation of it. Furthermore, S20 procedurally developed an algorithm by showing that the area of the formed shape was equal to the sum of the areas of the used pieces. However, S20, who used tiles with area of +1 unit² where green tiles with area of -1 unit² should have been used, was asked to multiply the algebraic expressions again by using the distributive property. Thus, S20 was able to see his/her mistake by examining the model and checking the lengths of the sides of the rectangle. Then, S20 reviewed his/her answer and corrected it. Therefore, it can be said for S20 that the conceptual understanding of the question was achieved. Also, it can be said that procedural understanding was also achieved because S20 confirmed the result by applying the distributive property.

In another question of the elaboration phase, students were asked to write appropriate algebraic expressions for the given models. The solution of student S20 is given in Figure 10.

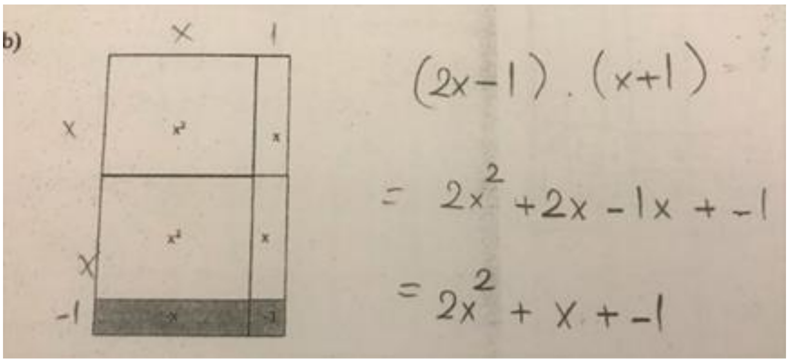


Figure 10. The Solution of Student S20 for the Question Given in Part b

S20, had disregarded the negative terms while solving the first question. However, in this question, S20 paid attention to the algebra tiles and was able to interpret the model and find the correct answer. When students were given already-done models in this part, they were able to answer the questions involving the multiplication of algebraic expressions conceptually more easily since they became experienced in using algebra tiles.

During this part of the Syllabus 2, students identified the factors of the algebraic expression by using models. They were able to transition between representations by using models of multiplication of algebraic expressions. Furthermore, they were able to write the multiplication of algebraic expressions by interpreting the given model. Thus, it can be said that conceptual understanding was achieved. In addition, students were able to multiply expressions involving letters. They were able to apply the distributive property of multiplication over addition and subtraction while doing the multiplications 2.(x + 3), x.(x + 2), (x + 3).(2x - 1), and while multiplying algebraic expressions that they formed according to the given model. Thanks to this method, it was observed that students comprehended and applied the meaning of the distributive property of multiplication over addition and subtraction more easily, and thus, procedural understanding was supported. Also, working with concrete materials increased the interest and participation to the practice. In different phases of the syllabus, students had the chance to comprehend the multiplication of algebraic expressions conceptually and procedurally.

Before starting the evaluation phase of multiplication of algebraic expressions, students easily remembered the concept of factor by referring to the subject of factors and multiplication that had been taught in the previous semester. Thus, they realized that each side of the rectangle was a factor, and then they were introduced to the subject of "factoring". Then, the session continued with the exploration activity for the learning outcome "Students can factor algebraic expressions through the grouping method".

In the exploration phase, students were asked to form rectangles the areas of which were 3x + 6 and x² + 3x by using algebra tiles. Then, they were asked to find the areas of the formed rectangles by finding the side lengths in their models. The answers of students S19 and S18 to the questions are respectively given in Figure 11.

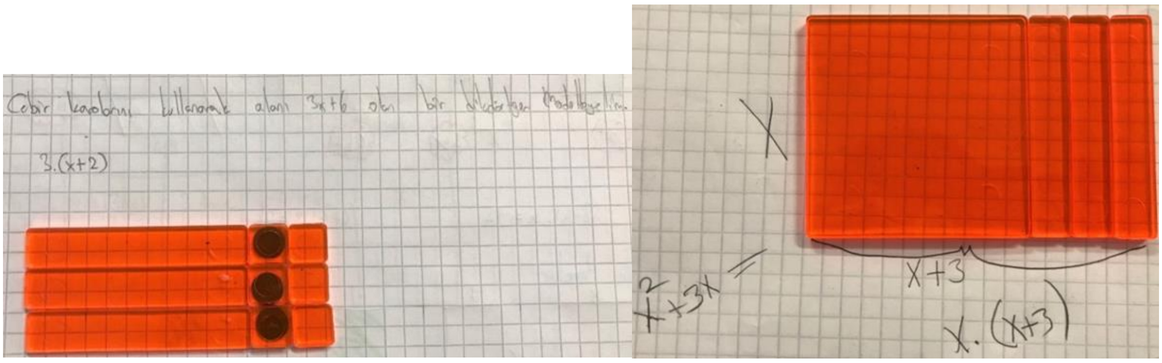


Figure 11. The Solution of Students S19 and S18 in the Exploration Phase

All students, including S19 and S18, made a rectangular model for the given algebraic expression, and were able to write the expression in the form of multiplication of two algebraic expressions. They also found the common factor. Thus, students were able to form a relation between algebra and geometry through the models they made and were able to achieve conceptual understanding of the grouping method of algebraic expressions. In order for the learning outcome to be understood procedurally, students were asked to remember their prior knowledge and think about how to procedurally use the grouping method. The dialog that took place in this part is as follows:

A: So, do you remember how we find common factors or common multiples? We learned about these in our classes on factors and multiplication. For example, what are the common factors of 8 and 10?
S2: Both of them can be divided by 2.
A: S2, could you explain how we find that?
S2: 8 equals 2 times 4. And 10 equals 2 times 5. Then, 2 is the common factor.
A: Yes. Then what do you say about the common factor of the terms of the expression $(x^2 + 3x)$?
S3: In the term $(x^2 + 3x)$, x is a factor.
A: Could you explain how we find that?
S3: We can write x^2 as x times x, and 3x as 3 times x. So, both expressions have x in common.
A: Yes, that is correct. Does everyone understand how we did that? (All students responded positively) If x is common, then how do we write the expression $x^2 + 3x$ in the form of a multiplication?
S3: We write it as $x.(x + 3)$ by using the common factor.
A: That is the exact way to write it. So, how do we write the expression 3x + 6 in the form of a multiplication?
S5: 3 is common here.
A: Could you explain how we find that?
S5: 3x equals 3 times x, and 6 equals 3 times 2. So, 3 is common. It is written as $3.(x + 2)$.

When students were reminded about the concepts of common multiple and common divisor that they had learned in the subject of factors and multiplication, they were driven to think about the subject. As a result, they were able to find the common divisors of numbers and they found the common factor. After that, when students were asked to find the factors of the given expressions and to find the common factors, they based their reasoning on this, and thus were able to find the common factors of the terms. As a result, students were able to find the common factors of algebraic expressions by developing a procedural algorithm. Thus, it can be said that students were able to express the grouping method by using their procedural knowledge. In the explanation phase, factoring algebraic expression through the grouping method was taught in terms of procedures.

In the elaboration phase, there was a question that required students to factor the expressions 5x + 5y, 24a + 32, $12m^2n - 8mn^2$, $18x^3 - 27x^2 + 36x$, $8a^2b - 6ab^2$ by using the grouping method and their procedural knowledge without making any models. All students were able to easily factor the first expression. The solution of student S11 for the expression 24a + 32 is given in Figure 12.

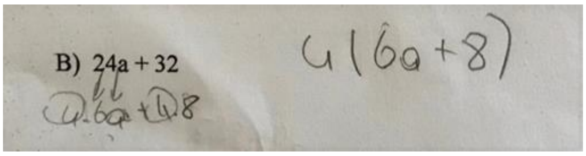


Figure 12. The Solution of Student S11 for Part B

S11 found one of the common factors while factoring the expression 24a + 32 instead of finding the greatest common factor. With the permission of S11, his/her solution was written on the board and examined. All students had the chance to see the solution and explanations and they were asked to contemplate. The dialog that took place in this part is as follows:

T: Is the equality of 24a + 32 = 4.(6a + 8) factored correctly through the grouping method?

S10: Yes. Both 24 and 32 can be divided by 4.
T: Then, are there any common factors in the expression 6a + 8?
S7: Yes, there is. They can be divided into 2.
T: So, what should be the common factor?
S9: Then, it should be 8 because it equals 2 times 4.
S11: It should be the greatest common factor.
T: Yes, that is correct. Actually, the solution of S11 (showing 24a + 32 = 4.(6a + 8)) is not wrong, but if we choose the greatest one of the common factors of a given algebraic expression, we get a more correct equality.

Thanks to the discussion where students were asked questions, both S11 and other students who did a mistake in this question found the greatest common factor of the terms, and procedurally understood how a common factor is found. The solution of student S3 for the expression $12m^2n – 8mn^2$ is given in Figure 13.

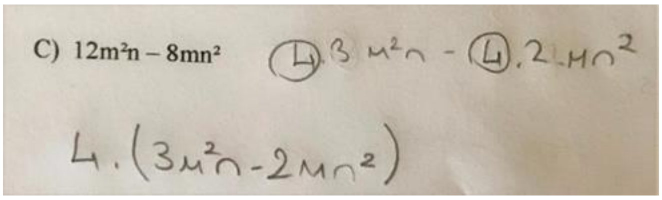


Figure 13. The Solution of Student S3 for Part C

Although S3 found the greatest common factor of the coefficients of the terms as shown in Figure 13, there were three students who didn't realize the common variables. The dialog that took place while student S3 was explaining his/her solution by using the board is as follows:

T: S3, how did you find the common factor?
S3: The number that divides 12 and 8 is 4.
T: Could you also examine the variables of the terms? What are the common factors of the terms' variables?
S3: Yes, the variables m and n are common.
T: Could you explain how we find that?
S3: m^2 equals m times m, and n^2 equals n times n.
S11: So, the common factor is 4mn.

Thanks to the solution done on the board and the explanations of this part, students procedurally learned how to find the common factors of variables by writing the exponent variables in the form of multiplications. Thus, in the other questions, all students were able to achieve procedural understanding of the learning outcome of factoring through the grouping method by finding the common factors of coefficients and variables of the given algebraic expressions.

In terms of conceptual understanding and the learning outcome "Students can factor through the grouping method", students comprehended the concept of common factor, and found the side lengths of the rectangles with areas of $3x + 6$ and x^2+3x by modeling them in this syllabus. As to the procedural aspects, students found the common factors by relating this subject to the subject of factors and multiplication, and were able to find the greatest common factors of the coefficients of the terms. In addition, they were able to find the common factor by writing the exponent variables (m^2) in the form of multiplications (m times m), and they grouped the algebraic expression by taking the common coefficients and variables into account.

In the evaluation phase of the syllabus, in order to see to what extent conceptual and procedural understanding were achieved for the learning outcomes "Students can multiply algebraic expressions" and "Students can factor algebraic expressions through the grouping method", students' conceptual and procedural understanding were assessed together in the questions that required both making models and using procedural knowledge. In terms of these two types of knowledge, all students showed progress in both the answers to the evaluation questions and throughout the process. Furthermore, students were made ready for the subjects of identities and factoring by learning what they hadn't known and by completing their prior knowledge.

3.2. Results concerning the conceptual and procedural understanding processes of students while learning the subjects of identities and factoring

This section includes the results produced by the application of Syllabus 3 which had been prepared for the learning outcomes "Students can explain identities using models" and "Students can factor similar forms of the expressions '$a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ and $a^2 - b^2$'".

In the engagement phase, students were given different equalities. They gave different values to variables of the equalities, and saw that both sides of some equalities were the same under all conditions. Then, students were asked to find which of the following equalities had both sides being equal under all conditions: $2.(x + 4) = 2x + 8$, $2 – x = x + 2$, $-(4a + 7) = - 4a – 7$, $9m + 7m = 16m$, $(3x)^2 = 3x^2$. By doing arithmetical operations, most of the students said that these equalities were the 1^{st}, 3^{rd}, and 4^{th} ones. After that, students found that the variables of the other equalities had only one value by replacing the variables with different numbers, and they remembered that these were equations. The dialog that aimed to give a clue about the concept of identity is as follows:

A: What is the difference between the equations you found and the other equalities?
S13: In the others, whatever value we give to x, the two sides are always equal.
S5: But x has only one value in an equation.
A: Yes, that is correct. So, how do you define these equalities?
S19: No matter which number we replace the variable with, the right side is equal to the left side.

Thus, it can be said that procedural knowledge of understanding the concept of identity and the difference between an identity and an equation were formed by supporting conceptual understanding.

3.2.1. Results Concerning Square of Sum of Two Terms

Figure 14 shows the solution of student S11 in the activity that was aimed at making students conceptually understand the identity of the square of sum of two terms in the exploration phase.

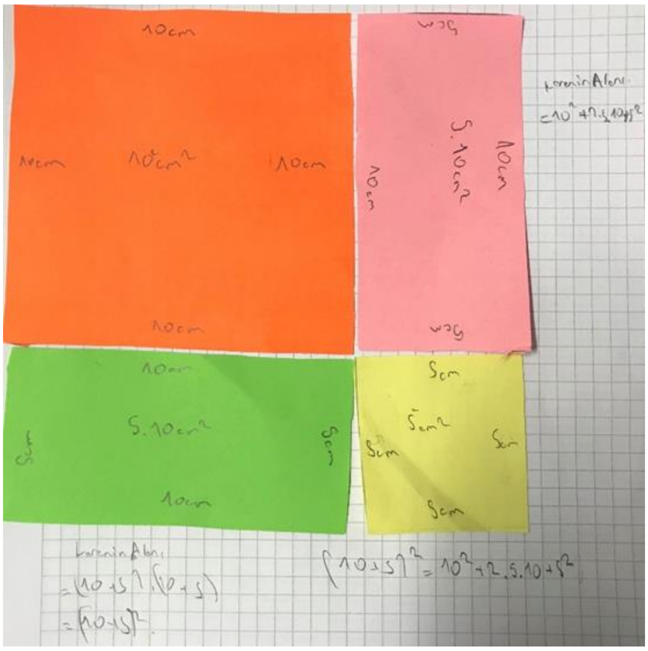


Figure 14. The Work of Student S11

All students, just like S11, found the area of the square by both summing the areas of the pieces and using the area formula of a square, and they saw that the two methods produced the same result. Thus, they realized that the expression $(10 + 5)^2$ is equal to the expression $10^2 + 2.5.10 + 5^2$, which has three terms, by making models. In the explanation phase, what students had explored in the previous phase was explained again in terms of procedures by saying that the identity of $(a + b)^2$ is solved as the sum of the square of the first term plus two times the multiplication of the first term and the second term plus the square of the second term.

In the elaboration phase, students were asked to write the expansions of the expressions $(x + 5)^2$, $(2a + 3)^2$, $(k + 4m)^2$ by using the square of sum of two terms. It was seen that some students solved without squaring the coefficient in the expression $(2a + 3)^2$. After students were given a clue by reminding them to check their solutions in which they squared a variable with a coefficient, they corrected their mistakes. Therefore, it was observed that students achieved procedural understanding of this identity. In the other questions of the worksheet, students were asked to draw models of the given algebraic expressions by using algebra tiles, and to find the factors of the given expressions with three terms by using the area formula of the shape they formed. The solution of student S12 is given in Figure 15.

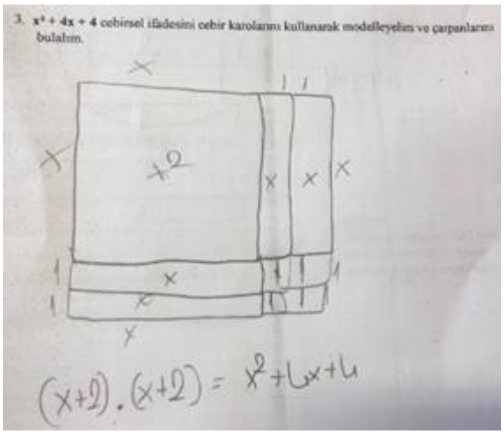


Figure 15. The Solution of Student S12 for the 3rd Question

The fact that all students, including S12, were able to model an expression with three terms by deciding which algebra tiles to use shows that they used conceptual knowledge. In addition, they were able to write the identity by using the side lengths of the square model. They did this through the area formula of a square and by summing the areas of the algebra tiles. Eventually, they found the factors of the given algebraic expressions. By modeling, they conceptually discovered that the factors of a given expression with three terms were also the factors of the algebraic expression that is one side of the square they formed. This phase was also applied as an exploration activity for the learning outcome of factoring the expression $a^2 + 2ab + b^2$. In the explanation phase, it was shown that $(x + 2)$ was a factor of the algebraic expression $x^2 + 4x + 4$ by teaching the factoring method for $x^2 + 4x + 4$ in terms of procedures. In the elaboration phase, the questions were intended for factoring the expression $a^2 + 2ab + b^2$. The conceptual questions asked to model this, and the procedural ones were meant to assess procedural knowledge. Students were able to correctly answer both conceptual and procedural questions.

Throughout the learning process, all students learned about the learning outcomes concerning the square of sum of two terms and factoring it. In terms of conceptual understanding, they learned about the concept of identity. They were also able to distinguish between an identity and an equation, and to form the identity by using geometrical models and relations. They generalized this identity through expressions with letters. In addition, they modeled expressions with three terms and they factored them. They were able to find the identity that is modeled geometrically and its factors. As to the procedural aspects, they were able to write the area formula of a square through terms with letters, and they wrote the expansion of the square of sum of two terms by using the formula. Also, they were able to factor algebraic expressions with three terms by using formulas. Thus, the subject of the square of sum of two terms and factoring it, as well as understanding this subject conceptually and procedurally, was repeatedly supported in various phases of the syllabus.

3.2.2. Results Concerning the Square of the Difference of Two Terms

In the exploration phase, students did an activity that was aimed to make them conceptually understand the square of the difference of two terms. Each student completed this activity by himself/herself. The work of student S5 is given in Figure 16.

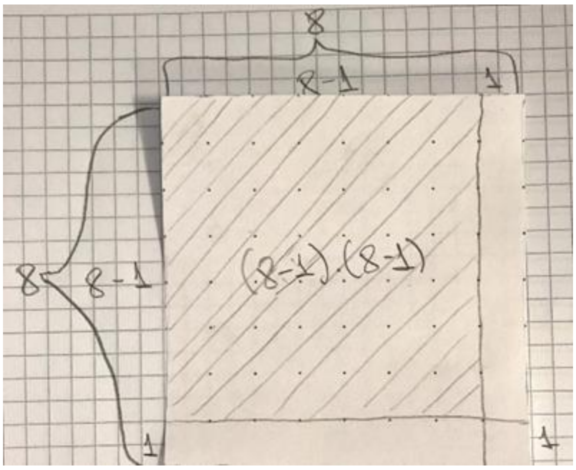


Figure 16. The Work of Student S5

The dialog between the researcher and students about the solution given in Figure 16 is as follows:

T: How did you form the square that has sides of (8 - 1) units based on the square you had?
S11: I cut 1 cm off the side, and here (shows the other side of the square).
T: So, how did you find the area of the rest of the square?
S5: I did it by multiplying two sides.
T: Is there another way to find the area of the square?
S20: By subtracting the parts that we cut off from the whole shape.
T: That is correct. Now, let's find the area of the rest of the square by subtracting the areas of the parts we cut off the area of the whole square.

Most students had determined the pieces the one side of which was 1 unit, and cut these pieces by themselves out of the squares the side of which was 8 units. Thus, in this part, they were able to realize that they had subtracted the square on the intersecting part of the cut pieces which had area of 1 unit^2 twice. They told that the area of that square should be added. However, there were students who couldn't find the correct result and the identity. Still, these students were given the chance to conceptually understand the identity through the discussions in Q&A format and the solutions examined on the board. Furthermore, in order to support the conceptual understanding of the square of the difference of two terms and make this understanding more permanent, students were given squares with different side lengths and asked to do the previous activity one more time using these. Thus, they gained conceptual proficiency of the square of the difference of two terms by experiencing the problem by themselves on a square model. In the explanation phase, how to find the expansion of the square of the difference of two terms was explained once again in terms of operations.

In the first question of the elaboration phase, students were asked to find the equal expressions of the algebraic expressions $(x - 7)^2$, $(3a - 4)^2$, $(z – 2t)^2$ by using the square of the difference of two terms. They were able to find the correct answer by taking the coefficients of the terms into account. This shows that students gained the proficiency of procedurally understanding the expansion of the square of the difference of two terms. In the other questions of the worksheet, students were distributed algebra tiles. Then, they were asked to model the algebraic expressions $x^2 - 4x + 4$ and $x^2 - 6x + 9$, and to factor these expressions by using the area formula of a square on the square they made. The solution of student S20 is given in Figure 17.

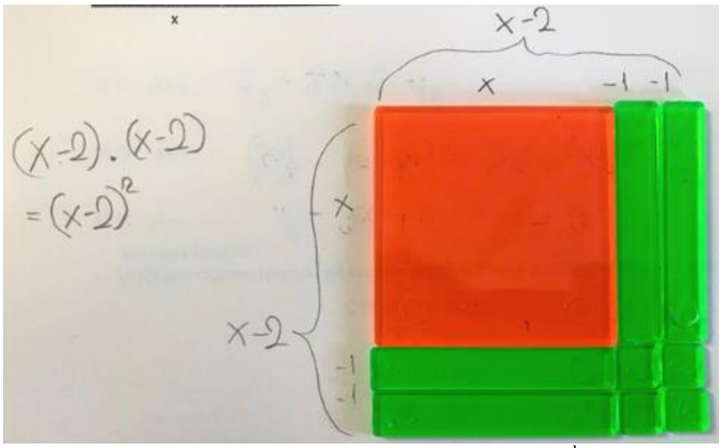


Figure 17. The Answer of Student S20 for the 2nd Question

The dialog between S20 and the researcher that took place in this part is as follows:

T: Could you check whether the area of the model you formed equals the given algebraic expression?
S20: When I sum the areas of these pieces, I get $x^2 - 4x - 4$. It isn't equal to this. (shows the question involving $x^2 - 4x + 4$)
T: So, could you check your model again?
S20: I need one "x^2", four "-x" and four "+1" so that I get "+4". I should put the orange ones here because their signs are positive. (Shows the algebra tiles with area of 1 unit2)

While S20 was thinking about the square that he/she had modeled in the beginning, S20 realized by himself/herself that orange tiles with area of +1 unit^2 should have been used instead of the green tiles with area of -1 unit^2. Students who also used the wrong algebra tiles corrected their models according to the explanations made in this part. Thus, they learned from their mistakes and were careful about that in the other question. So, it can be said that students conceptually understood that the side length of the square was the factor of the algebraic expression. This phase was constructed as the exploration activity for factoring quadratic expressions. In the explanation phase, it was shown that (x - 3) was a factor of the algebraic expression $x^2 - 6x + 9$ by explaining the factoring method for $x^2 - 6x + 9$ in terms of operations.

In the elaboration phase, students were able to factor the expressions $9m^2 - 42m + 49$, $25a^2 - 80ab + 64b^2$, which have three terms, by using their procedural knowledge, and they correctly answered the conceptual questions that asked for modeling. In this class, all students learned about the learning outcomes concerning the square of the difference of two terms and factoring it. In terms of conceptual understanding, they found the identical expression of the square of the difference of two terms by using the area formula of a square. They generalized this numerical identity through expressions with letters. Also, they were able to geometrically model algebraic expression with three terms and factor them. Finally, they were able to find the identity that was modeled geometrically and its factors. As to the procedural aspects, they found the expansion of the square of the difference of two terms by using the formula, and were able to factor the algebraic expressions with three terms by using the square of the difference of two terms. As a result, it can be said that the square of the difference of two terms and factoring this identity were experienced by all students in a way that conceptual and procedural understanding supports each other throughout the phases of 5E learning cycle.

3.2.3. Results Concerning Difference of Two Squares

The activity included in the exploration phase was aimed to achieve conceptual understanding of difference of two squares. In order to make this activity easier to understand, dot or graph papers were used. The solution of student S12 is given in Figure 18.

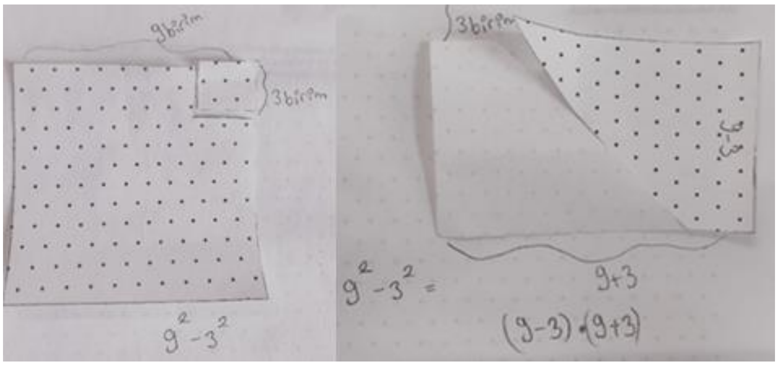


Figure 18. The Work of Student S12

All students, including S12, were able to say that the area of the bigger piece they found at the beginning was equal to the area of the rectangle they formed in the second stage. The dialog between the researcher and S6 that took place in this part is as follows:

> T: How do you find the area of the rectangle you formed?
> S6: Teacher, the shorter side should be (9 - 3) and the longer side should be (9 + 3). I would multiply these to find the area.
> T: Yes, that is correct. So, what can we say about the areas we found?
> S6: This is the same shape (shows the rectangle). We formed it by cutting. The two are equal.
> S20: Teacher, this means that we factored 9^2 - 3^2.
> T: Yes, that's exactly what we did.

Thus, it can be said that students conceptually discovered how to factor 9^2 - 3^2 by proving that these two expressions were equal. All students gained proficiency in conceptual understanding of difference of two squares and factoring it. In the explanation phase, the identity a^2 - b^2, which had been discovered by students, and factoring it were explained by making models.

In the elaboration phase, there was a question that was aimed for conceptually and procedurally assessing students' knowledge and skills for difference of two squares and factoring it. The solution of student S10 for this question is given in Figure 19.

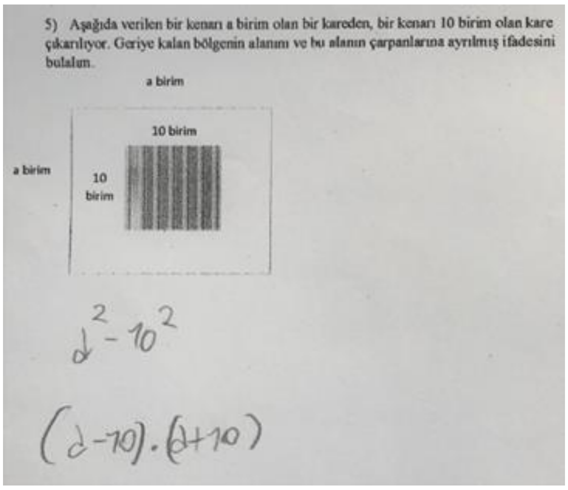


Figure 19. The Solution of Student S10 in the Elaboration Phase

Students found the area of the final shape by first subtracting the area of the smaller square from the area of the bigger square. Then, they were able to write the factors by using the expansion of difference of two squares. In this class, students learned about the subject of difference of two squares and factoring it. In terms of conceptual understanding, all students were able to find the expression that was equal to the difference of two squares by using the area formulas of a rectangle and a square on their models. In addition, they discovered the general identity $a^2 - b^2$ through the examples of $9^2 - 3^2$ and $x^2 - 6^2$, and they found the identity representing the given model and its factors in different problems. In terms of procedural understanding, on the other hand, they were able to factor the expression of difference of two squares through the area formula, and they could factor the given algebraic expressions in different problems. Thus, it can be said that all students experienced conceptual and procedural understanding of the identity $a^2 - b^2$ during the phases of exploration and elaboration of this syllabus in a cycle.

In the 1st and 2nd questions of the evaluation phase, which was the last part of the teaching experiment, students found the equalities that were identities by giving different values to the variables and seeing which equalities were true under all conditions. They were able to distinguish between an identity and an equation by both doing mathematical operations and writing the expansions because of having learned all of the identities. The solution of student S14 for the first question requiring to identify the identities is given in Figure 20.

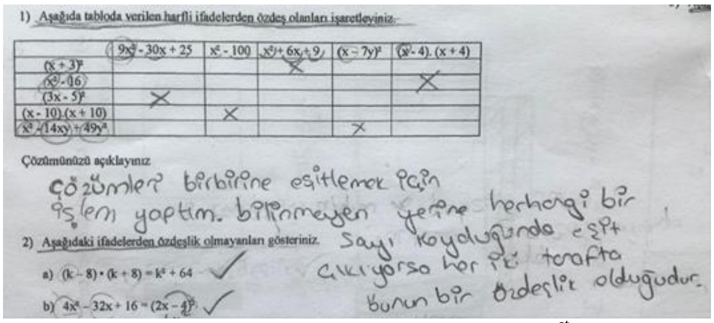


Figure 20. The Answer of Student S14 for the 1st Question

S14 said that the algebraic expressions which were always equal to each other for all the values of the variables were identical. This shows that S14 explained the concept of identity by using his/her conceptual knowledge. Some students were able to match the algebraic expressions that were identical because they had learned the expansions of identities. The solution of student S11 is given in Figure 21.

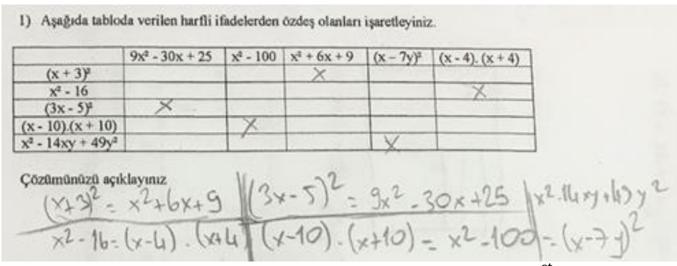


Figure 21. The Answer of Student S11 for the 1st Question

It was seen that some students like S11 found the identical terms through the rules of identities which they had learned based on their procedural knowledge. In the 2nd question, students were asked to distinguish between the concepts of identity and equation. The solution of student S7 is given in Figure 22.

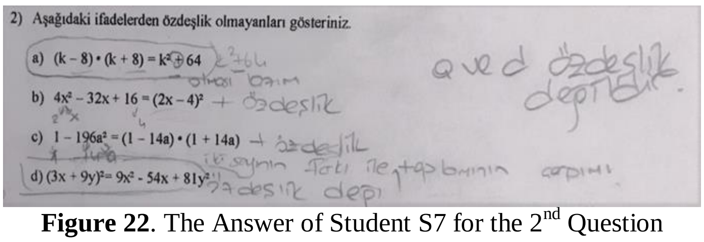


Figure 22. The Answer of Student S7 for the 2nd Question

When the evaluation papers were examined, it was observed that other students paid attention to the coefficients of the equalities and their signs just like S7 did. Also, they took the rules of identities into account, and found the equalities that weren't identities. Thus, it can be said that students distinguished between the concepts of equation and identity based on their procedural knowledge. Eventually, procedural skills of students enabled them to distinguish between basic structures like an equation and an identity and to understand these structures. These skills also enabled them to discern the concept of identity. Therefore, procedural skills of students supported their conceptual learning.

Figure 23 shows the solution of student S4 for another question that was about factoring the square of the difference of two terms and that was intended to assess procedural understanding.

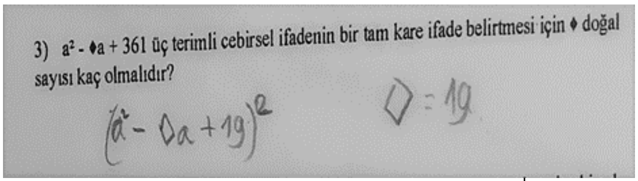


Figure 23. The Answer of Student S4 for the 3rd Question

S4 realized that the square root of 361 was 19, but squared the whole algebraic expression. Thus, it was seen that S4 didn't realize that the given expression was in the form of the square of the difference of two terms. The solution of student S18 for the same question is given in Figure 24.

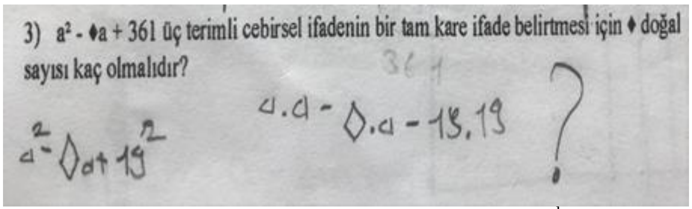


Figure 24. The Answer of Student S18 for the 3rd Question

Although S18 realized that the given algebraic expression was the expansion of the square of the difference of two terms, S18 couldn't find the second term. It is deduced that 4 students, including S14 and S18, whose levels of success were low didn't have sufficient procedural understanding of the square of the difference of two terms. However, students whose levels of success were medium or high were able to answer the question easily.

In another question, students were asked to first write the algebraic form of a given verbal expression, and then to factor it. The solution of student S5 is given in Figure 25.

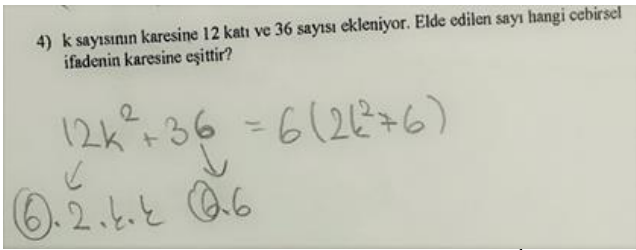


Figure 25. The Answer of Student S5 for the 4th Question

As shown in Figure 25, the algebraic expression written by student S5 was wrong, and S5 couldn't find the common factor of the terms. After the evaluation, S5 was asked about why he/she had chosen to solve it in this way. S5 said that he/she had thought this was what the question asked for, and that this was the reason for writing the algebraic expression in that way. Thus, it is deduced that carelessness caused this mistake and not lack of knowledge. However, most students were able to find the square of sum of two terms by writing the appropriate algebraic expression for the given verbal expression and writing its expansion. Thus, it was deduced that most students achieved conceptual and procedural understanding of this identity.

Furthermore, students were able to correctly write the similar forms of identities $a^2 + 2ab + b^2$ and $a^2 - 2ab + b^2$ by using their procedural knowledge while factoring these expressions. However, 5 students couldn't factor the expressions given in the form of $a^2 - b^2$. The solution of student S7 is given in Figure 26.

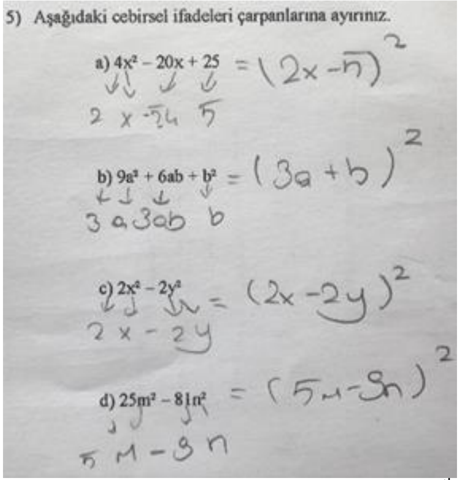


Figure 26. The Answer of Student S7 for the 5th Question

S7 found the square roots of the terms of expressions given in parts c and d. However, S7 saw these expressions as the square of sum or difference of two terms by generalizing the expressions, and made mistakes in the equalities he/she wrote. When the evaluation papers were examined, it was realized that students had difficulty in parts c and d. In part c, student S13 factored without grouping the terms and without making 2 the common factor. This issue might have been caused by not dwelling on different algebraic expressions which would have made students use their procedural knowledge in the elaboration phase of difference of two squares. Therefore, it was deduced that procedural knowledge of these students for factoring the difference of two squares was not complete.

In the last question where students were asked to explain identities through models, students easily modeled the square of sum of two terms and difference of two squares, but had difficulty modeling the square of the difference of two terms. The solution of student S14, whose level of success is medium, is given in Figure 27.

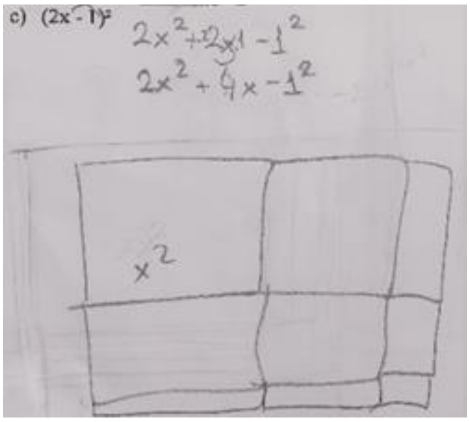


Figure 27. The Solution of Student S14 for Part c

As shown in Figure 27, S14 first tried to write the expansion of the identity, but did mistakes in the signs of the terms. S14 didn't show the negative tiles in his/her model, and modeled a square the side length of which was (2x + 1). The student's procedural mistake caused him/her to model incorrectly. It was also observed that conceptual understanding of S14 was not complete. On the other hand, a few students couldn't use the negative algebra tiles, and couldn't finish their models. The solutions of students S11 and S9 are respectively given in Figure 28.

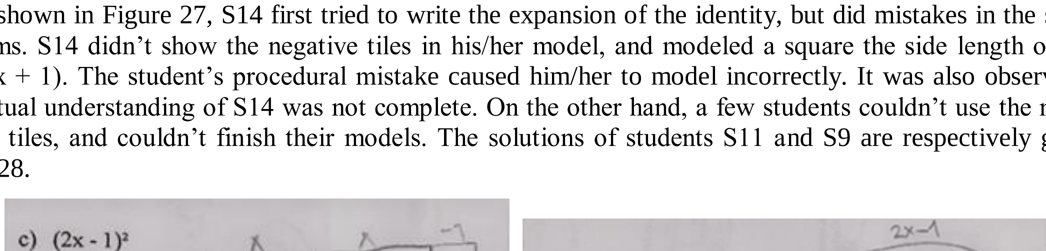


Figure 28. The Solutions of Students S11 and S9

5 students tried to model a square the side length of which was (2x - 1) for the given algebraic expression just like S11 and S9 did. However, they couldn't finish their models. After the evaluation phase, S11 and S9 were

asked about how they formed the models. They said that they tried to form a square but couldn't figure out the length of the other side. Thus, it was observed that these students' conceptual understanding of the identity $(a - b)^2$ was not complete. Their procedural knowledge was not complete either since they couldn't write the expansion of the identity. Results concerning the formation of students' conceptual and procedural understanding of modeling and factoring identities are given in Table 3. This data is based on the answers to the evaluation questions which were the last phase of the teaching experiment.

Table 3. Results Concerning Students' Conceptual and Procedural Understanding of the Subjects of Identities and Factoring

Type of Knowledge	Learning Outcome	Question Number	Student Number
Conceptual Understanding	Students understand the concept of identity.	1	All
	Students can explain the difference between the concepts of identity and equation.	2	All
	Students can find the square of sum or difference of two terms by writing the appropriate algebraic expression.	4	All except S5
	Students can model 3x.(x - 2) and similar expressions by using algebra tiles.	6 (part a)	All
	Students can model $(x + 3)^2$ and similar expressions by using algebra tiles.	6 (part b)	All except S16
	Students can model $(2x - 1)^2$ by using algebra tiles.	6 (part c)	All except S4, S8, S11, S14, S18
Procedural Understanding	Students can write the expansions of the identities $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ and $a^2 - b^2$ through their rules.	1	All
	Students can factor quadratic expressions with three terms by using the rules of $(a + b)^2$ and $(a - b)^2$.	5 (parts a and b)	All
	Students can write the appropriate algebraic expression for a verbal expression, and factor it.	4	All except S5
	Students can multiply the terms in 3x.(x - 2) by using the distributive property.	6 (part a)	All
	Students can write the expansion of the expression $(x + 3)^2$ through the rule of the identity.	6 (part b)	All except S16
	Students can write the expansion of the expression $(2x - 1)^2$ through the rule of the identity.	6 (part c)	All except S9, S11, S14
	Students understand the square of the difference of two terms and find an unknown term of it.	3	All except S4, S8, S11, S18
	Students use difference of two squares on different algebraic expressions.	5 (parts c and d)	All except S7, S8, S13, S18

As shown in Table 3, all students drew the models for the square of sum of two terms more easily by using algebra tiles and easily factored it in their conceptual and procedural understanding processes in the subjects of identities and factoring. Because all terms of the square of sum of two terms are positive, it was seen that students completely achieved both conceptual and procedural understanding. However, students S4, S8, S11, S14, S18, who have low or medium levels of success, had difficulty modeling the square of the difference of two terms, while students S4, S8, S11, S18 had difficulty procedurally understanding the square of the difference of two terms. Also, it was observed that students S8, S18, S7 and S13 had difficulty procedurally understanding difference of two squares.

4. Discussion, Conclusion and Suggestions

In this research, conceptual and procedural understanding processes of eighth grade students in the subjects of identities and factoring were examined through a teaching experiment based on 5E learning cycle. Thus, results were analyzed in two stages where the questions of ''Do students have the prior knowledge required for achieving conceptual and procedural understanding of the subjects of identities and factoring?'' and ''How do students proceed with 5E Learning Cycle in the subjects of identities and factoring in terms of conceptual and procedural understanding?'' were examined.

In the first stage, prior knowledge of students about the prerequisite learning outcomes of identities and factoring was examined. Thus, learning outcomes of "Students understand simple algebraic expressions" and "Students can paraphrase algebraic expression'' were considered as the prior knowledge that students use in order to achieve conceptual and procedural understanding of the subjects of identities and factoring which are included in the mathematics curriculum. In this respect, it was observed that students easily wrote appropriate algebraic expressions for given verbal expressions, and appropriate verbal expressions for algebraic expressions. In addition, students remembered the concept of variable (unknown), and rearranged algebraic expressions by using the four basic mathematical operations on terms. However, all students forgot that a constant is also a coefficient. Furthermore, it was observed that some students ignored the "-" and "+" signs in front of the terms while identifying terms. In her research on learning algebra, Gürsoy (2019) observed that students had difficulty identifying the terms and coefficients of algebraic expressions, and they ignored the signs while identifying the terms and coefficients. She adds that she couldn't find any other way than constantly repeating the definitions of variable, term, coefficient and constant during class in order to resolve this issue. Since students face such difficulties while using mathematical symbols, it can be suggested that teachers endeavor to make students conceptually understand symbolic expressions in mathematics classes. In the elaboration phase of the learning outcome "Students can paraphrase algebraic expressions" and the evaluation phases of these two learning outcomes, it was observed that students were able to show the concepts of term, coefficient and constant given in different questions of the worksheet as well. Also, they didn't forget about the signs of the terms and were able to paraphrase algebraic expressions by doing arithmetical operations between terms with letters. Similarly, Gürsoy (2019) states that it would be helpful for students to be reminded about their prior knowledge about operations with integers, which students should have, before starting the subject of algebraic expressions because this would help them do operations with algebraic expression. Therefore, it is recommended that teachers use activities that renew and complete students' prior knowledge because this contributes to students' procedural and conceptual understanding of a certain subject.

In the learning outcome "Students can multiply algebraic expressions", which is another prerequisite learning outcome, it was observed that students conceptually interpreted the distributive property over addition and subtraction through modeling. Through the activity that involved modeling with algebra tiles and was included in the syllabus, it was observed that students conceptually understood the concept of factor by using what they had learned in the subject of factors and multiplication. Sarı (2012) states that after a conceptual learning period supported by metacognition, students might think about the solutions of similar questions that require the use of procedural knowledge through their metacognitive ability and correct their procedural mistakes while solving questions, and adds that teaching algebra in a way that supports conceptual understanding may contribute to the success in gaining and using procedural knowledge. Thus, it was observed that doing activities or solving questions that were concept and process-based instead of knowledge-based ones was more effective in learning the subjects conceptually. As a result, it is recommended that teacher utilize activities that support conceptual understanding in their classes.

There were students who couldn't interpret the results of the multiplications of the similar forms of the algebraic expression $(x - 2).(x + 3)$ which involved negative terms, and they did the multiplications through the models they made. It was noticed that procedural knowledge of these students for multiplying algebraic expressions was complete. However, they couldn't relate the results they found with the models they made, which meant that their conceptual understanding was not complete. A similar situation was observed in the study of Birgin and Gürbüz (2009) where they deduced that secondary school students were more successful in problems that assessed procedural knowledge than the ones that assessed conceptual knowledge. On the other hand, in the research she carried out based on the modeling method, Yazır (2015) inferred that activities involving models developed conceptual and procedural knowledge. Therefore, it is recommended that teachers use more activities with models, utilize more visuals or use more materials during the in-class activities when they teach the learning outcomes aiming to achieve conceptual understanding.

In the learning outcome "Students can factor algebraic expressions through the grouping method", students modeled the expressions "$3x + 6$" and "$x^2 + 3x$" by forming rectangles with algebra tiles, and wrote the algebraic expressions as multiplication of the two sides of the rectangle. Eventually, it was observed that they conceptually understood how to interpret factoring algebraic expressions on the basis of modeling. Furthermore, while factoring the same algebraic expression, the given examples consisted of natural numbers in order to support procedural understanding, and the focus was on the common divisors of these numbers. Thus, students explored the way algebraic expressions are factored. Similarly, Baykul (2014) argues that teachers should remind the concepts of factor and factoring, and begin with activities involving natural numbers when they start teaching the subject of factoring algebraic expressions since they had focused on the concept of factor when they had taught the subject of factors and multiplication. As a result, mathematics teachers can be suggested that they utilize more practices where conceptual and procedural understanding are supported and where students relate subjects of mathematics in order to provide a more useful learning.

In the phase where the learning outcomes "Students can multiply algebraic expressions." and "Students can factor algebraic expressions through the grouping method." were evaluated together, questions that assessed conceptual and procedural understanding were given together. It was observed that students formed the models in the correct way and were able to interpret the given models. Also, they correctly answered the questions by using their procedural skills on different models. This is parallel to the results given in the study of Rittle-

Johnson and Koedinger (2009) which was that teaching classes in a way that conceptual and procedural learnings are iterated facilitated gaining procedural skills and supported conceptual learning.

In the second stage, conceptual and procedural understanding processes of students while learning the subjects of identities and factoring were examined, and this was the main goal of the study. Thus, according to the results produced by Syllabus 3, students were able to find the algebraic expressions that were proven to be equal by giving different values to the letters in terms of understanding the concept of identity. Also, they conceptually discovered the difference between their answers and the concept of identity as well as between an equation and an identity. As a result, it was observed that procedural knowledge supported the formation of conceptual knowledge. This result is parallel to the conclusion of Baki and Kartal (2004) which was that mathematical learning of students became more effective and permanent when the relations between mathematical concepts were emphasized during classes on these concepts. Furthermore, all students participated in the activity thanks to the Q&A method, and they were encouraged to contemplate the difference between the concepts of equation and identity. Thus, students gained understanding of these concepts although they hadn't heard of them until then. As a result, it is recommended that teachers use different methods of teaching and encourage students to give their own explanations in order to teach the subject effectively. It is also suggested that teachers choose practices that attract students before starting to teach the subject.

In the subjects of the square of sum or difference of two terms, difference of two squares and factoring these expressions, students were able to find the expansions of these identities by associating them with geometrical shapes and relations through algebra tiles and by generalizing numerical relations through letters in different phases of 5E learning cycle. Thus, they experienced the formation of the knowledge about the subject conceptually and procedurally. Similarly, Akın and Pesen (2010) state that using concrete materials while teaching identities is effective in making students experience active learning and making their knowledge more permanent. Moreover, in her study, Çaylan (2018) argues that using discovery learning and its methods in teaching algebraic concepts positively affects learning in secondary school. Therefore, while teaching identities, teachers may develop different teaching methods such as using concrete materials like algebra tiles that students can form by themselves and making models that contribute to conceptual learning.

Because geometrical shapes and formulas that have a significant role in the subject field of algebra contribute to conceptual understanding of students and help them do operations and learn formulas, teachers are recommended to use these in algebra classes. Furthermore, students were able to factor the similar forms of the expression $a^2 \pm 2ab + b^2$ and of difference of two squares through mathematical operations, formulas and rules. Thus, they also achieved procedural understanding. Baki and Kartal (2004) and Rittle- Johnson and Alibali (1999) argue that in terms of gaining conceptual and procedural knowledge, the development of conceptual knowledge facilitates the formation of procedural knowledge. As a result, for the permanence of the learning outcome, mathematics teachers are recommended to teach the conceptual and procedural aspects of the learning outcome in a way that these support each other and are balanced. Mathematics teachers are also recommended that they allow students to discover the rules and formulas on identities and factoring them by showing the proofs of these instead of directly giving these to students and telling them to memorize them.

It was observed that some students disregarded the coefficients while squaring the terms of the expression $(2a + 3)^2$. However, these students realized their mistakes once they were given clues, and corrected these by themselves. After this, most students were careful about the coefficients of the terms in the question requiring to factor algebraic expressions with three terms, and they were able to factor these algebraic expressions by correctly using their procedural knowledge. Şahiner (2018) inferred that 8th grade students made mistakes in algebra questions involving parentheses, and had difficulty applying the rules of arithmetic operations to algebraic expressions. This result is similar to the aforementioned one.

While working with algebra tiles to model the algebraic expression $x^2 - 4x + 4$, students of lower levels of success disregarded the fact that multiplication of the side lengths of the square should be equal to the sum of the areas of the pieces used to form the square. This shows that conceptual understanding was not sufficient to find the square of the difference of two terms by modeling. Similarly, Soylu and Soylu (2006) found that students had difficulty learning concepts which required them to use their procedural and conceptual knowledge together. In order to eliminate this problem, students were first asked to model the algebraic expression $x^2 - 6x + 9$. After some explanations and clues were given, it was seen that they didn't do the same mistake in this question, and they formed the correct square model by using the correct algebra tiles. Finally, they factored the given algebraic expression by determining the side lengths of the square they formed. This is supported by the deduction of Özer and Şan (2013) which was that activities supported by visual materials during classes on identities enhanced the success of students approximately sixty percent. On the other hand, Rittle-Johnson and Koedinger (2009) argue that an iterative process of conceptual and procedural understanding in teaching modeling makes concepts and procedures easier to learn. In this respect, the number of further activities involving conceptual and procedural knowledge together should be increased in mathematics classes, and subjects should be taught in a way that these two types of knowledge are balanced.

In the evaluation phase which involved the complete subjects of identities and factoring and was the last phase of the 5E learning cycle, students were able to conceptually distinguish between the concepts of identity and equation. They were able to explain what an identity is, the difference between an identity and an equation, and what the variables of an equation stand for. Also, they wrote the expansions of the algebraic expressions which were identities by using their procedural knowledge, and determined the equalities that weren't identities. Thus, it is deduced that in mathematics classes, emphasizing not only what a concept is and its definition but also the relations between concepts makes mathematical concepts more permanent in students' minds. As a result, mathematics teachers are recommended to focus on the relations between concepts while teaching.

Because of the unknown coefficient in the algebraic expression $a^2 - \blacklozenge a + 361$, it was observed that students of low level of success couldn't completely achieve procedural understanding of the subject of the square of the difference of two terms and factoring it. The reason for this could have been that either students couldn't remember the expansions of the identities and methods of factoring them or they couldn't comprehend how to apply their knowledge in a different question. This is parallel to the result given in the study of Şahiner (2018) which was that in the subject of identities, either students did mistakes especially while doing the four basic operations or they couldn't use the algebraic identity which was the one asked for. This is also supported by the result given in the study of Çelik and Güneş (2013) which was that most 7th and 8th grade students had difficulty using the information that symbols with letters were numbers, unknowns and variables. Therefore, mathematics teachers are recommended that they enable students to see problems in different structures and enable them to use their knowledge in different situations while teaching the subjects of identities and factoring.

In a question that assessed both conceptual and procedural understanding, student S5 wrote a different algebraic expression for the given verbal expression, and couldn't factor this expression. This is similar to the conclusion of Birgin and Gürbüz (2009) which was that secondary school students were more successful in questions that assessed procedural knowledge. However, in the question requiring to factor the given algebraic expression through procedural knowledge, the reason why students S7, S8, S13, S18 couldn't use the rule of difference of two squares in different questions may have been that they hadn't done activities which would have strengthened their procedural knowledge. It appears that mathematics teachers should find the most effective ways of enabling students to experience algebraic thinking and to reason. Thus, mathematics teachers are recommended that they utilize different types of questions that require algebraic thinking as much as possible. In the last question of the evaluation phase, students were asked to draw models of algebraic expressions, which were designed for conceptual understanding, by using algebra tiles. Students S2 and S5, whose levels of success are high and medium, first used their procedural knowledge and didn't directly use their conceptual knowledge. Thus, it is deduced that procedural understanding was prioritized with respect to conceptual learning. This is parallel to the result given in the study of Sarı (2012) which was that procedural knowledge points of 7th grade students were significantly higher than their conceptual knowledge points at the end of the teaching period which was conducted through metacognitive strategies in terms of these students' conceptual and procedural knowledge development in the subjects of algebraic expressions and equations. Similarly, in their research, Baki and Kartal (2004) deduced that most students experienced a type of mathematical learning in which procedural knowledge was prioritized with respect to conceptual knowledge during the formation of these students' algebraic knowledge. As a result, it is recommended that the number of resources to guide teachers in conceptual teaching is increased in order to enhance conceptual understanding of students to the point that it reaches their level of procedural success.

While modeling the identity $(2x - 1)^2$, some students whose levels of success in mathematics were medium and low couldn't relate their knowledge in geometry to the subject of identities. In addition, reasoning skills of these students weren't sufficient, and their procedural knowledge was more enhanced than their conceptual understanding. Similarly, in her study, Ulaş (2015) inferred that students whose levels of success were low weren't able to correctly do operations with algebraic expression by using the area of a rectangle. Likewise, in terms of the learning outcome about being able to explain identities through models, Dündar (2012) found that students had difficulty relating their algebraic and geometrical knowledge on geometrical shapes, and the primary reason why they couldn't find the relation between the side length of the shape they formed and its area while finding the expansions of identities was that they didn't understand that the found area should have been the same at the end of both procedures. Therefore, it could be a more suitable method to teach students about the structure of identities involving subtraction in terms of algebra before making models for these identities. After that, students can model by discovering the relation between these identities and geometry. Finally, it is inferred that students couldn't relate the model with the algebraic expression given in the question, and they couldn't utilize their past experience while solving similar questions. Consequently, it is recommended that learning environments in which teachers closely know their students' needs and methods of learning are provided. These environments should be designed in a way that students are more active in their own learning experience, and they evaluate, question and interpret their own solutions. Providing such environments can enable students to achieve conceptual and procedural understanding together and in a way that these two support each other.

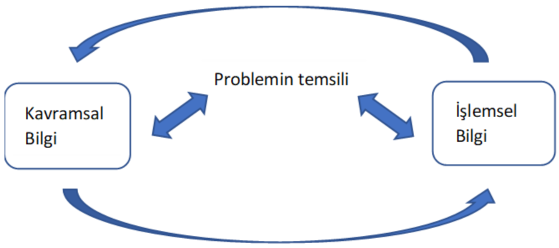
Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Özdeşlikler ve Çarpanlara Ayırma Konusuna Yönelik Kavramsal ve İşlemsel Anlama Süreçlerinin İncelenmesi

1. Giriş

Çağımızın eğitim anlayışı, öğrencinin bilgi düzeyini ölçmekten çok, bilginin öğrenci için anlamlı ve hayata geçirilebilir olmasına dayanmaktadır. Yenilikçi eğitim ortamlarında, öğrencilerin sadece öğrenen rolünde değil, yorumlama ve sorgulama yapma, analiz etme sürecine dahil olduğu ve kendi kendine öğrenebilecekleri ortamlar ön plana çıkmaktadır. Yenilenmiş öğretim programında (MEB, 2009) yapılan değişiklikle öğrenci merkezli ve sadece işlemsel bilgiyi değil aynı zamanda kavramsal bilgiyi de ön plana çıkaran bir yapı ön plana çıkarılmıştır. Bu bakış açısı ile öğrencilerin konuları ezbere öğrenmelerinin önüne geçilerek, derinlemesine anlamalarına olanak sağlanması gerekmektedir. Bu becerinin kazanımında ve yaşama geçirilmesinde gerekli olan kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi, Hiebert ve Lefevre (1986) tarafından ortaya koyulmuş, araştırmacılar ve öğretmenlerce en temel bilgi türü olarak kabul edilmiştir. Böylelikle kavramsal ve işlemsel bilgi, eğitim alanında yapılan en önemli araştırma konularından biri olarak da ön plana çıkmıştır.

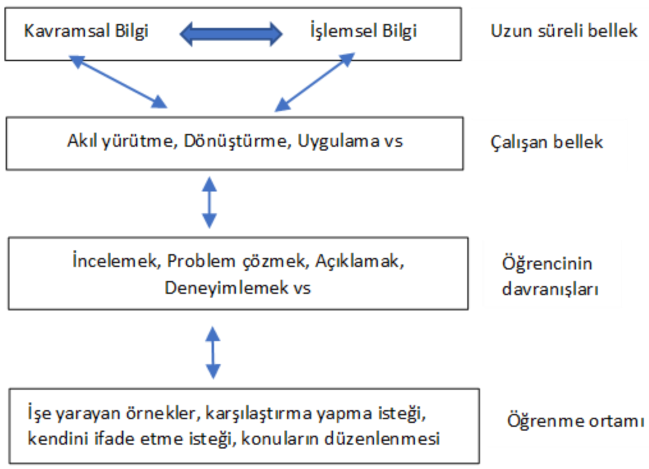
1.1. Kavramsal ve İşlemsel Bilgi

Kavram ve işlem bilgisi arasında anlamlı bir ilişki kurularak bir konu bütünüyle öğrenilebilir (Delice ve Sevimli, 2010). Matematikte yeterlilik ancak bu şekilde sağlanabilir. Bu bağlamda matematiksel bir bilginin nitelikli hale gelebilmesini sağlamak için kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi olmak üzere iki yönünden desteklenmesi gerekmektedir. Kavramsal ve işlemsel bilgi bir devamlılık üzerine kuruludur ve her zaman birbirinden ayrılamaz (Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001). Bu yinelemeli görüş, kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki iki yönlü ilişkinin, zaman içinde, karşılıklı bir etkileşime girerek birbirini desteklediğini öngörmektedir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015). Bu bağlamda öğrencilerin sahip olduğu matematiksel bilgilerini, hem kavramsal hem de işlemsel bilgi yönünden dengelemek oldukça önemlidir. Şekil 1'de öğrencilerde kavramsal ve işlemsel bilginin gelişimini gösteren "yinelemeli model" gösterilmektedir.



Şekil 1. Kavramsal ve işlemsel bilgi gelişimi için yinelemeli model (Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001, s. 347)

Şekil 1'e göre, kavramsal bilgide gerçekleşen bir ilerleme, işlemsel bilgiyi olumlu anlamda etkilerken, işlemsel bilgide gerçekleşen bir artış da kavramsal bilgide gelişim sağlamaktadır. Şekil 2'de ise kavramsal ve işlemsel bilginin öğrencinin zihinsel süreçlerindeki etkileşimini göstermektedir.



Şekil 2. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkilerin bileşenleri (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015, s. 1128).

Şekil 2'de görüldüğü gibi bellek, öğrenmenin önemli bir bileşeni ve bellekte gerçekleşen beceriler de kavram ve işlem bilgisinin oluşum sürecindeki bağlantılı yapısını göstermektedir. Bu bileşenlerin oluşumu zincirleme şeklinde bir sistemle ilerlemekte ve nihayetinde bilgi öğrencinin uzun süreli hafızasında 'nedenini' ve 'nasılını' bilerek yapılanmaktadır. Bu bağlamda matematiksel bir bilginin nitelikli hale gelebilmesini sağlamak için kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi olmak üzere iki yönünden desteklenmesi gerekmektedir. Rittle-Johnson ve Siegler (1998), öğrencilerin matematiksel kavramları anlama ve işlemleri uygulama yetenekleri arasında pozitif bir ilişki olduğu sonucuna varmışlardır. Bu bağlamda matematik öğrenimi, kavramsal ve işlemsel anlamanın karşılıklı bir etkileşim halinde olmasının önemi görülmektedir. Dolayısıyla hem kavramsal hem de işlemsel bilginin bir arada yürütüldüğü bir öğretim daha etkili ve anlamlı olacaktır.

Matematiğin en temel öğrenme alanlarından olan cebir öğrenme alanı, içerdiği kazanımlar ve öğrenme hedefleri göz önünde alındığında hem kavramsal hem de işlemsel anlamanın bir arada yürütülerek işlenmesi gereken bir alan olduğu söylenebilir.

1.2. Cebir Öğrenme Alanı

Baki (2015), cebir öğrenme alanının amacını, sembol ve grafiklerin kullanıldığı gösterimleri anlamlandırma, sembol ve grafikleri kullanarak sonuca varma ve ilişkiler elde etme, bu sonuçları ve ilişkileri de yine sembol ve grafikler ile ifade etme olarak özetlemiştir. Bu açıklamaya paralel olarak Usiskin'e (1988) göre cebir, belirli problemleri çözmek için bir araç olmasının yanında, ilişkilerin tanımlanması ve analiz edilmesi, matematiksel yapıların sınıflandırılması ve anlaşılmasının bir anahtarıdır. Buna bağlı olarak sadece bir matematik konusu olarak değil, bir düşünme biçimi olarak da yaşamın her alanında kendini gösteren cebir konusunun anlaşılmasında, bu iki bilgi türünün bir arada işe koşulması öğrencilerin gelecekteki cebir deneyimleri için bir temel oluşturmaktadır. Cebirsel ifadeler konusu, ortaokul matematik dersi öğretim programında geniş bir zaman ayrılan, matematikte soyutlaştırmaya geçiş yapılan ve bundan sonraki tüm öğretim aşamalarında derinleşerek yer almaya devam eden matematiğin en önemli konularından biridir.

Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı; Sayılar ve İşlemler, Cebir, Geometri ve Ölçme, Veri İşleme ve Olasılık olmak üzere beş öğrenme alanından oluşmaktadır. Cebir öğrenme alanı ile ilgili kazanımlar ilk olarak 6. sınıfta yer almaya başlar. 6. sınıfta öğrencilerden sayı örüntüleri kullanılarak istenilen terimi bulmaları, değişken ve cebirsel ifadeleri anlamlandırmaları, cebirsel ifadeler ile toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları ve bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpmaları hedeflenmektedir. 7. sınıfta öğrencilerin eşitlik ve denklem kavramını anlamaları ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve ilgili problemleri çözmeleri hedeflenmektedir. 8. sınıfta ise öğrencilerin denklem ve özdeşlik anlamlandırarak, cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmaları beklenmektedir. Bunun yanında iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin incelenmesi, denklem çözümleri ve bir bilinmeyenli eşitsizliklerin incelenmesi yer almaktadır (MEB, 2013). Matematik öğretim programından da görüldüğü gibi öğrenciler özdeşlikler kavramı ve çarpanlara ayırma konusu ile ilk defa 8. sınıfta karşılaşmaktadır.

8. sınıftaki özdeşlikler konusuna yönelik kullanılan bağıntılar, formüller ve uygulamalar esasen gerçek yaşamla çok ilintili değildir. Bunun yanında özdeşlikler konusuna yönelik formülleri ezberleterek yürütülen derslerde, öğrenciler kavramsal anlamadan uzak bir öğrenmeye sahip olurlar. Diğer taraftan matematik dersi öğretim programında (2018), yeni bir kavramın öğretiminde ve yapılacak olan değerlendirmelerde mümkün olduğu ölçüde somut materyaller ve çeşitli modellemeler kullanılması gerektiği belirtilmiştir. Özdeşliklerin de kavramsal olarak anlaşılması modelleme yoluyla cebir ve geometri arasındaki ilişkiyi ön plana çıkararak, bu iki farklı öğrenme alanını bir bütün olarak ele alarak gerçekleştirilebilir. Yine matematik öğretim programında (2018), cebir öğrenme alanına ait kazanımlar işlenirken yeri geldiğinde diğer öğrenme alanlarındaki kazanımlarla ilişkilendirilme yapılması gerektiği vurgulanmıştır. Bu bağlamda, cebir öğrenme alanının somutlaştırarak anlamlandırılması, hem matematik öğretiminin amaçlarından biri olan matematik okur-yazarlığının hem de cebirsel düşünme becerisinin kazandırılmasında önemli bir yer tutmaktadır.

Somut materyallerin kullanıldığı etkinliklerde öğrencilerin cebir karoları ile özdeşlikleri modellemesi, bağıntıları geometrik olarak yorumlaması; bilgiyi aktif bir öğrenme ortamında oluşturmasını sağlayacaktır. Bu durum da yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının en temel bileşenlerindendir. Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımında da eğitim programının merkezinde öğrenci vardır, öğrenme hedefleri üst düzey becerilere yöneliktir ve sürece dayalı bir öğrenme planlanır, öğrenme içeriği ise öğrencilerin ilgileri ile ve gerçek yaşamla ilişkili olmalıdır, hem öğrenme ve öğretme hem de değerlendirme etkinlikleri ise öğrencilerle birlikte şekillenir, uygulanır ve değerlendirilir (Koç, 2002). Yapılandırmacı yaklaşım ile en uyumlu öğrenme modellerinden olan 5E Öğrenme modeli de bu eğitim ortamları için uygulanacak en etkili modellerden biridir.

5E modelinde öğrenciler ön bilgileri ile yeni kavramları keşfeder ve bu yeni kavramlar ile ön bilgilerini ilişkilendirir. Öğretim sırasında uygulanan öğrenme-öğretme etkinlikleri ile öğrenciler yeni kavramları derinlemesine anlamayı ve belirli bir problem durumuna ilişkin öğrenmelerini kendileri oluştururlar. Dolayısıyla 5E Öğrenme Modeli dersi aşamalı olarak planlayan bir öğrenme yaklaşımıdır (Kaymakçı, 2015). 5E Öğrenme

Modeli bir döngü şeklindedir. İsmini her bir aşamanın baş harfinden almıştır. Bu basamaklar; giriş (Engage), keşfetme (Explore), açıklama (Explain), derinleştirme (Elaborate), değerlendirme (Evaluate) şeklindedir (Demir, 2018).

Son yıllarda ortaokul öğrencilerine yönelik, cebir öğrenme alanı ile ilgili çeşitli araştırmalar yapılmış ve halen yapılmaktadır. Bu araştırmalardan elde edilen sonuçlardan, öğretim programlarında cebir öğretimi konusunda çeşitli düzenlemeler yapılmasına rağmen, öğrencilerin cebir öğrenme alanında zorlandıkları, cebirsel ifadeyi yanlış anlamlandırma, cebirsel ilişkileri kuramama, değişken kavramını anlamlandıramama ve özdeşlikleri oluşturamama gibi temel zorluklar yaşadıkları ve buna bağlı olarak kavram yanılgılarının olduğu belirlenmiştir (Erdem ve Aktaş, 2018; Macgregor ve Stacey, 1997; Övez ve Çınar, 2018; Şahiner, 2018; Şimşek, 2018; Ulaş, 2015; Yıldız, Çiftçi, Akar ve Sezer, 2015). Diğer taraftan, yapılan çalışmalarda öğrenciler, cebirsel ifadeler ve özdeşlikler üzerinde gerekli kuralları ve formülleri uygulayarak işlemsel becerilerin gerçekleştiğini; ancak öğrencilerin bu işlemleri kavramsal açıdan ifade edemedikleri belirtilmiştir (Baki ve Kartal, 2004; Bekdemir, Okur ve Gelen, 2010; Karaaslan ve Ay, 2017; Sarı, 2012). Bununla birlikte, kavramsal ve işlemsel bilginin bir arada desteklenerek yürütülen öğrenme ortamlarında, araştırmacılar öğrencilerin istenen hedefleri başarılı bir şekilde tamamladıklarını ve kalıcı bir öğrenmenin gerçekleşmiş olduğunu belirtmektedirler (Delice ve Sevimli, 2010; Orhan, 2013; Örmeci, 2012; Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001; Rittle-Johnson ve Koedinger 2009; Taştepe, 2018; Yazır, 2015).

Kavramsal ve işlemsel anlamanın bir arada yapılandığı öğrenmeler sonucunda, öğrencilerin cebir başarısı üzerindeki etkisini araştırmak, gelecekteki matematik başarısı için bu başarının gücü hakkında bilgi sağlayabilir. Bu çalışma, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun öğretiminde, 5E öğretim modeline uygun yapılan derslerin, sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal ve işlemsel anlamalarının nasıl oluştuğunu açıklarken, matematik öğretmenlerine öğrencilerin ihtiyaçlarına yönelik cebir derslerinde uygulayabilecekleri etkinlikler sunmaktadır.

Bu araştırmanın amacı; sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik kavramsal ve işlemsel anlama süreçlerini, 5E öğretim modeline dayalı bir öğretim deneyi aracılığıyla incelemektir.

Bu amaçla, ‘‘Öğrenciler, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunda kavramsal ve işlemsel anlamayı gerçekleştirmek için ön bilgiye sahip midir?’’ ve ‘‘Özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun 5E öğretim modeli ile öğretiminde öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama süreçleri nasıldır?’’ sorularına cevap aranacaktır.

2. Yöntem

Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik kavramsal ve işlemsel anlama süreçlerini derinlemesine ve ayrıntılı bir şekilde inceleyebilmek için sürece dayalı bir yaklaşım kullanılması gerekmektedir. Bu bağlamda araştırmanın amacına uygun olarak öğretim deneyi yöntemi kullanılmıştır. Steffe ve Thompson (2000), öğretim deneyi (teaching experiment), araştırmacıların faaliyetlerini organize ederken kullandıkları kavramsal bir araç ve öğrencilerin matematiksel etkinliğini araştırmak ve açıklamak için tasarlanmış yaşayan bir araştırma yöntemi olduğunu belirtmişlerdir. Çalışmada öğretim deneyini kullanmanın öncelikli amacı, öğrencilerin matematiği öğrenme yollarını ve muhakeme yapabilme becerilerini deneyimleyerek, öğrencilerin oluşturdukları matematiksel kavramların ve işlemlerin anlaşılması sağlamaktır (Steffe ve Thompson, 2000). Bunun yanında öğretim deneyi yöntemi, gelişimsel bir araştırma bağlamında üç merkezi yönü, öğretimin tasarımı ve planlaması, sınıf içinde etkinliklerin uygulaması ve öğretim deneyi süresince elde edilen tüm verilerin geriye dönük analizi olarak ifade edilebilir (Cobb, 2000).

Bir öğretim deneyinin yürütülmesindeki en temel konu, öğretim deneyi süresince gerçekleşen eylemler ve etkileşimlerin, araştırmacıya nasıl davranılacağına ve beklenmedik bir durumda nasıl sorular sorulacağına dair noktaları ortaya çıkarmasını sağlamasıdır (Steffe ve Thompson, 2000). Bu bağlamda öğretim deneyinde öğretmene (araştırmacıya) önemli rol düşer. Öğretim deneylerinde öğretmenler, sınıfın sosyal bağlamında hareket eder ve öğrencilerle etkileşimde bulunarak öğrencilerin matematiksel gelişimlerini desteklemede son derece etkilidir (Cobb, 2000). Araştırmacıların amacı, öğrencilerle duyarlı ve sezgisel bir şekilde etkileşime girerek, öğrencilerin akıl yürütme becerilerini incelemektir (Steffe ve Thompson, 2000). Araştırmacılar, öğrencilerin söylediklerinin ve eylemlerinin altında yatan anlamı sürekli olarak ifade etmelidir, böylelikle öğretim deneyi ilerledikçe, araştırmacılar öğrencilerin rehberliğinde daha deneyimli hale gelir (Steffe ve Thompson, 2000).

Çalışmada da süreç içerisinde edinilen verileri değerlendirerek ve yorumlayarak, öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerini ve düşünme biçimlerinin derinlemesine incelenmesi hedeflenmiş olup öğrencilerin öğrenme süreçlerini iyileştirmek amacıyla tasarlanan, ders planlamalarının uygulanmasını sağlayan bir yöntem olan öğretim deneyi yöntemi kullanılmıştır.

2.1. Katılımcılar

Çalışma grubu 2017-2018 eğitim öğretim yılında, İstanbul ilinde bulunan bir ortaokulda, sekizinci sınıfta öğrenim gören 20 öğrenciden oluşmaktadır. Bu grubun seçilmesinin nedeni, araştırma için hedeflenen kazanımların öğretim programında bu sınıf düzeyinde olması, öğrencilerin akademik başarı açısından heterojen olması ve en önemlisi de araştırmacının beşinci sınıftan bu yana öğrencilerin matematik derslerini yürüttüğü için, öğrencilerin cebir öğrenme alanındaki yaşadıkları zorlukları gözlemlemiş ve deneyimlemiş olmasıdır.

Araştırmanın bulgular bölümünde, çalışma grubunun gizliliği açısından her öğrenci numaralandırılmış, öğrencilerin başarı düzeyleri 5, 6, 7. sınıflardaki matematik dersi notlarına dayanarak hesaplanmış ve belirlenen kodlar eşliğinde Tablo 1'de belirtilmiştir.

Tablo1. Başarı Düzeylerine Göre Öğrenci Kodları

Başarı Seviyeleri	**Öğrenci Kodları**
Yüksek Başarı Düzeyi	Ö1, Ö2, Ö3, Ö10, Ö12, Ö15
Orta Başarı Düzey	Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16, Ö19, Ö20
Düşük Başarı Düzeyi	Ö4, Ö8, Ö11, Ö17, Ö18

Tablo 1'deki gibi öğrencilerin başarı durumları heterojen bir şekilde dağılmış olduğu görülmektedir.

2.2. Veri Toplama Araçları

Araştırma sürecinde kullanılan araştırmacının gözlem notları ve günlükleri, hazırbulunuşluk testi ve ders planlarında yer alan etkinlik kağıtları ve çalışma yaprakları kullanılmıştır.

Hazırbulunuşluk testi, sekizinci sınıf öğretim programında yer alan cebirsel ifadeler, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun öğrenimi için öğrencilerin ön bilgilerini görmek ve öğrencilerin eksiklikleri doğrultusunda 5E modeline uygun ders planları geliştirmek amacıyla, 6. ve 7. sınıf ortaokul matematik öğretim programında yer alan cebir öğrenme alanındaki kazanımlar dikkate alınarak hazırlanmıştır. Sorular konu ile ilgili temel kavramlar ve bu kavramları uygulamaya yönelik; öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgi ve becerilerini ölçecek niteliktedir. Testin geçerliğinin sağlanması açısından sorular ders kitapları, konu ile ilgili kitaplar, soru bankaları ve araştırmacının deneyimleri doğrultusunda hazırlanmış, hazırlanan sorular alan uzmanı ve bir matematik öğretmeni tarafından kontrol edilmiştir. Testin güvenirliğinin sağlanması açısından, önce testin pilot uygulaması yapılmış, sorular kontrol edilmiş ve içerisindeki anlama hatası, madde yapılarında eksiklik vb. gözlenen sorularda düzenlemeler yapılmış ve test yenilenmiştir. 6. sınıf cebirsel ifadeler konusunun ilk kazanımı olan 'Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar' kazanımından 5 tane kavramsal, 'Cebirsel ifadenin değerini, değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar' kazanımında bir tane işlemsel ve 'Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar' kazanımında bir tane kavramsal soru, 7. sınıfın ilk kazanımlarından olan 'Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar' kazanımında 2 kavramsal bir tane işlemsel, 'Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar', 'Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur' ve 'Eşitliğin korunumu ilkesini anlar' kazanımından birer tane kavramsal ve işlemsel olmak üzere 16 adet açık uçlu soru yer almaktadır.

Öğretim deneyinin 5E öğretim modeline uygun hazırlanan ders planı 1, 'Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar' kazanımlarını, ders planı 2, 'Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar ve ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırır' kazanımlarını ve ders planı 3 ise 'Özdeşlikleri modellerle açıklar ve çarpanlarına ayırır' kazanımlarını içerecek şekilde hazırlanmıştır. Yine hazırlanan bu ders planları pilot çalışması yapılmış, tespit edilen eksiklikler doğrultusunda ders planlarındaki etkinlikler ve çalışma yapraklarındaki sorular düzenlenerek yenilenmiştir. Ancak öğretim deneyinin doğası gereği, uygulama süresince gözlemlenen durumlardan dolayı ders planlarında değişiklik yapılması olasılığı her zaman ön planda tutulmuştur. Ders planların içerisindeki etkinlik kağıtları ve çalışma yaprakları öğrencilerin düşünmelerini, sorgulamalarını, yorumlama yapabilmelerini sağlayarak, kazanımları kavramsal ve işlemsel anlama boyutunda deneyimleyerek yeni durumlara uygulayabilecekleri soruları ve etkinlikleri içermektedir. Sorular ve etkinlikler çeşitli kaynaklar incelenmiş, konunun amacı ve araştırma grubunun ihtiyaçları dikkate alınarak düzenlenmiş, kavramsal ve işlemsel anlama çerçevesinde revize edilerek, alan eğitimi uzmanları tarafından incelenmiş ve pilot uygulaması yapılarak geçerlik ve güvenirlik sağlanmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

Hazırbulunuşluk testindeki sorular açık uçlu olduğu için, öğrencilerin çözümlerinde nasıl bir yol izlediği, hangi matematiksel bilgileri kullandıkları, yapılan işlemler, çizimler, yorumlar ve vardıkları sonuçlar incelenerek; özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun kavramsal ve işlemsel olarak anlaşılmasını sağlayabilmeleri için sahip oldukları ön bilgi durumları belirlenmiştir. Elde edilen verilerden ders planı 1 ve 2 hazırlanmıştır. Bu planlarda eksiklikleri giderilen öğrenciler için özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik ders planı 3 hazırlanmıştır. Sonrasında öğretim deneyi süresince gerçekleşen uygulamalar sırasında yapılan gözlemler, öğrencilerin etkinlik kağıtları, çalışma yaprakları ve araştırmacı notları ve günlüklerinden elde edilen veriler, kazanımlara dair öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama durumları çerçevesinde betimsel analize dayalı bir şekilde derinlemesine incelenmiştir.

Kavramsal ve işlemsel bilgi birbirinden ayırılmaz bir bütün içerisinde gelişim gösterebileceğinden, bu iki bilgi türünün arasındaki ilişkiler ve kavramsal-işlemsel anlamanın nasıl bir değerlendirme yapılması gerektiği, bulguların yorumlanması ve analiz edilmesi açısından oldukça önemlidir. İşlemsel bilgi belirli kural, formül ve algoritmalara dayanarak temel işlemleri adım adım yapabilme ve önceki matematik bilgilerini bilgi düzeyinde kullanabilme ölçütlerini içerirken; kavramsal bilgi, temel kavramların anlamını bilme ve örnek verebilme, temsiller arasında geçiş yapabilme ve kavramların arasındaki bağları kurabilme, sorulara bütünsel şekilde yaklaşarak yorumlayabilme ve verdiği cevapları değerlendirebilmeyi içeren daha kapsamlı ve ayrıntılı bir değerlendirme yapmak gerekmektedir (Rittle-Johnson ve Schneider, 2015).

Bu bağlamada bulgular tanımlanırken öğrencilerin etkinlikler sırasında kavramsal anlama ve işlemsel bilgi-becerilerini örneklendirmek amacıyla doğrudan öğrenci yanıtlarına ve o sırada gerçekleşen diyaloglara yer verilmiştir. Diyaloglar ders akışını bozmayacak şekilde, gözlemci tarafından notlar alınarak kayıt altına alınmış, dersin hemen sonrasında günlükler tutularak ders esnasındaki gözlemler kaydedilmiştir. Daha sonra ise elde edilen bulgular, kavramsal ve işlemsel anlamanın nasıl oluştuğu ve bunlar arasındaki ilişkiler değerlendirilerek yorumlanmıştır.

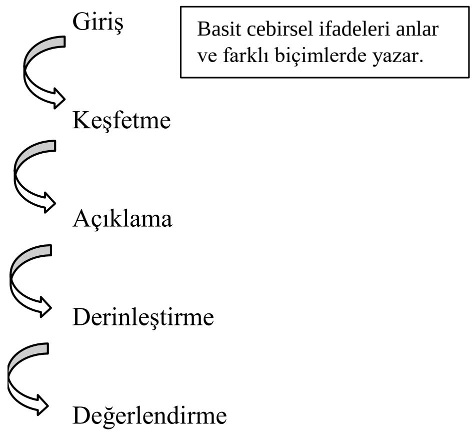
2.4. Süreç

Öğretim deneyi, hazırbulunuşluk testi ve üç ayrı ders planları olmak üzere 12 ders saati sürmüştür. Öncelikle 6. ve 7. sınıf ortaokul matematik öğretim programında yer alan cebir öğrenme alanındaki kazanımlar dikkate alınarak oluşturulan hazırbulunuşluk testi bir ders saati süresince uygulanan hazırbulunuşluk testine verilen yanıtlardan ve alan yazın taramaları da incelendikten sonra, öğrencilerin eksiklikleri ve hataları belirlenmiş, öğrencilerin konuya dair kavramsal ve işlemsel bilgileri hakkında veriler toplanmıştır. Elde edilen bu verilerden, kavramsal ve işlemsel anlamanın bir arada yürütüleceği 5E öğretim modeline uygun ders planlarının giriş, keşfetme, açıklama, derinleştirme ve değerlendirme aşamalarında uygulanacak olan etkinlikler ve çalışma yaprakları hazırlanmıştır. Hazırlanan etkinlikler, öğrencilerin konuyu öncelikle kavramsal olarak keşfetmelerini sağlayarak, oluşturdukları bilgileri işlem becerileri ile harmanlamalarını amaçlamaktadır. Çalışma kağıtları ise inşa ettikleri kavramsal ve işlemsel bilgileri yeni durumlarda nasıl uyguladıklarını gözlemlemeyi amaçlamaktadır. Cebirsel ifadeler, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun kazanımlarını içeren üç tane ders planı hazırlanmıştır. Buna yönelik olarak ders planlarında işlenen kazanımlar ve kaç ders saati sürdüğü Tablo 2'de gösterilmiştir.

Tablo2. Ders Planlarında İşlenen Kazanımlar ve Ders Saatleri

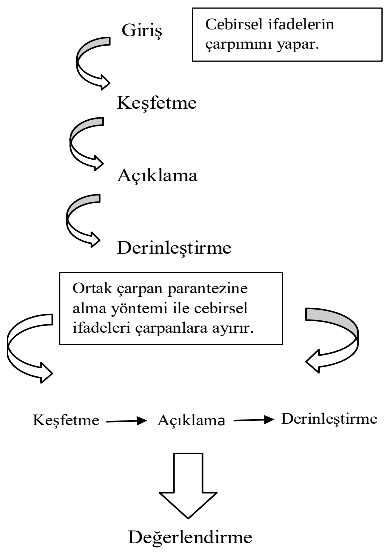
	Ders Planı 1	**Ders Planı 2**		**Ders Planı 3**			
Kazanım	Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar.	Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.	Ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.	Özdeşlikleri modellerle açıklar.	$a^2 + 2ab + b^2$ biçimindeki ifadeleri çarpanlarına ayırır.	$a^2 - 2ab + b^2$ biçimindeki ifadeleri çarpanlarına ayırır.	$a^2 - b^2$ biçimindeki ifadeleri çarpanlarına ayırır.
Ders saati	2 ders	1 ders	1 ders	2 ders	2 ders	2 ders	1 ders

Belirlenen ders planları ve saatleri doğrultusunda, 'Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar' kazanımı için hazırlanan Ders planı-1, Şekil 3'de verilmiştir.



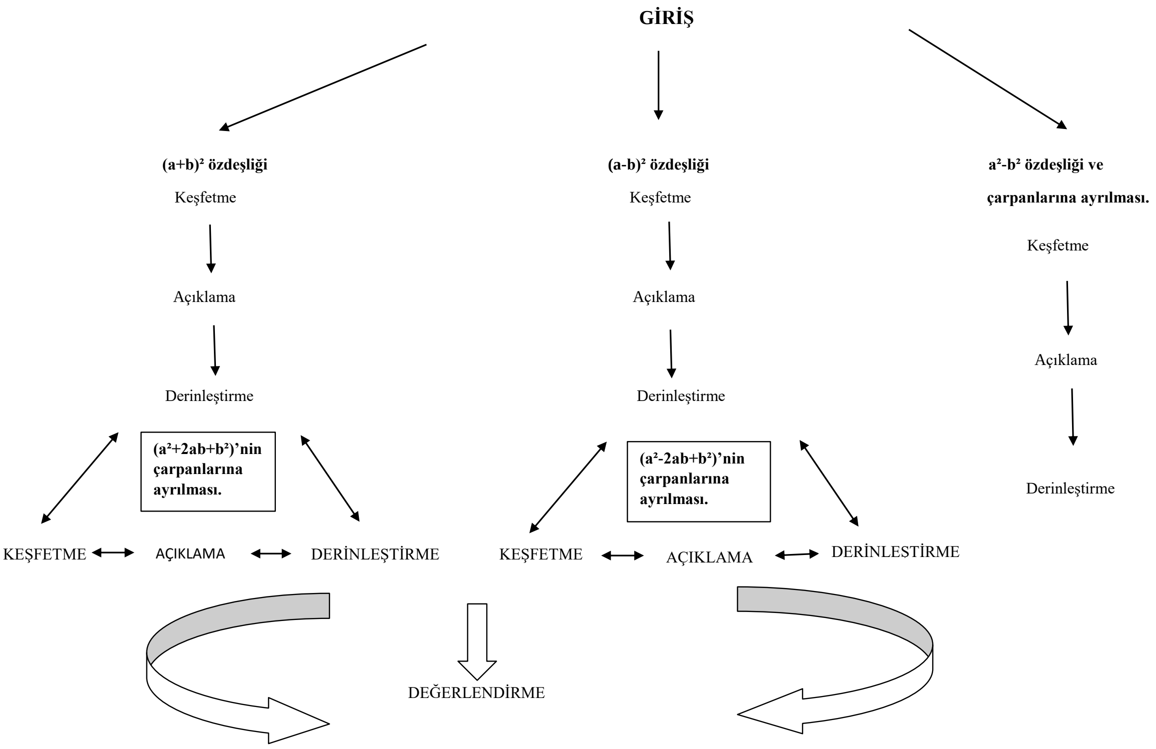
Şekil 3. Ders Planı-1

Giriş aşamasında öğrencilere çeşitli sözel ifadelere yönelik cebirsel ifadelerin yazılması istenmiştir. Burada cebirsel ifadelerde kullanılan harflerin sayıları temsil ettiği ve yerine farklı sayılar koyulduğunda sonucun değiştiği ve bu harflerin bir değişken olduğu sezdirilmiştir. Keşfetme aşamasında verilen cebirsel ifadeleri düzenleyerek terim, katsayı, sabit terimini bulmaları istenmiştir. Derinleştirme ve değerlendirme aşamalarında ise öğrencilerin basit cebirsel ifadeleri anlamlandırabilmesine ve verilen ifadeleri farklı biçimlerde yazabilmesine yönelik sorular sorulmuştur. Bu ders planının pilot çalışmasında, derinleştirme ve değerlendirme etkinliğinin birbirini tekrar eden nitelikte olduğu görülmüş ve diğer ders planlarında, zamandan da tasarruf edebilmek adına değerlendirme aşamasına geçmeden, ders planı içerisindeki tüm kazanımlar verildikten sonra ortak bir değerlendirme yapılmasına uzman görüşü alınarak da karar verilmiştir. Ders planı-2, Şekil 4'de verilmiştir.



Şekil 4. Ders Planı-2

Ders planı-2'nin giriş aşamasında, öğrencilerden farklı düzlemsel şekillerin alanlarının bulunması istenmiştir. Burada cebirsel ifadelerin çarpımına ve çarpan kavramına dikkat çekilmiştir. Daha sonra ''Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar'' kazanımının keşfetme, açıklama ve derinleştirme çalışmaları ile devam edilmiştir. Bu kısmın derinleştirme aşaması aynı zamanda, ''Ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır'' kazanımının keşfetme aşaması olarak uygulanarak, açıklama ve derinleştirme aşamalarına devam edilmiştir. Keşfetme, açıklama ve derinleştirme aşamalarında cebir karoları kullanılarak gerçekleştirilen çalışmalarda öğrenciler aşina olmadıkları öğretim materyalleri ile çalışarak, cebir karolarını daha yakından tanımışlardır. Daha sonra iki kazanıma yönelik ortak olan bir değerlendirme çalışması uygulanmıştır. Daha sonra özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konularını içeren üçüncü ders planına geçilmiştir. Ders planı-3, Şekil 5'de gösterilmiştir.



Şekil 5. Ders Planı-3

Ders planı-3 hazırlanırken yine öğretim programının esnek yapısından yararlanılarak, her bir özdeşlik ile o özdeşliğin çarpanlara ayrılması bir arada ele alınmıştır. Giriş kısmında özdeşlik kavramına ve denklem ile özdeşlik kavramı arasındaki farka vurgu yapılan bir etkinlik yapılmıştır. Daha sonra $(a+b)^2$ özdeşliğine yönelik keşfetme, açıklama ve derinleştirme çalışmalarına devam edilerek, derinleştirme aşamasında $a^2 + 2ab + b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlarına vurgu yapılarak, $a^2 + 2ab + b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlara ayrılmasının keşfetme aşaması olarak uygulanmıştır. Açıklama ve derinleştirme aşamalarına devam edilerek değerlendirme yapılmadan $(a-b)^2$ özdeşliğinin keşfetme aşamasına geçilmiştir. Yine derinleştirme aşamasında, $a^2 - 2ab + b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlarına vurgu yapılarak $a^2 - 2ab + b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlara ayrılmasının keşfetme aşaması olarak uygulanmıştır. Açıklama ve derinleştirme aşamalarına devam edilerek, yine değerlendirme yapılmadan a^2-b^2 özdeşliğinin ve çarpanlarına ayrılmasının bir arada işlendiği keşfetme, açıklama ve derinleştirme aşamaları uygulanmıştır. Ders planının en sonunda tüm özdeşliklerin ve çarpanlarına ayrılmasının bir arada olduğu ortak bir değerlendirme aşaması uygulanmıştır.

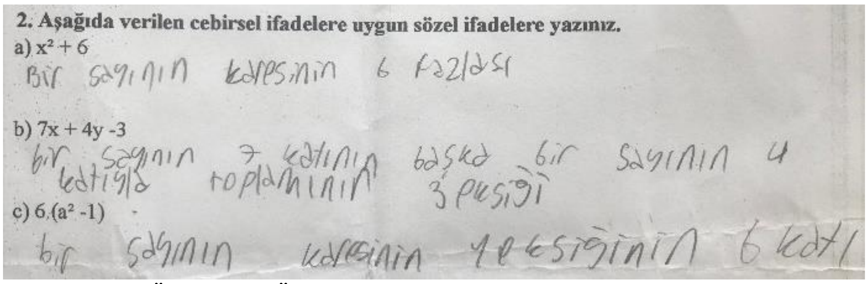
3. Bulgular

Hazırbulunuşluk testi ile öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik ön şart kazanımları kavramsal ve işlemsel anlama bağlamında incelenmiş ve bu bağlamda modelleme içeren, modellerin yorumlanması ve çıkarım yapılması istenen kavramsal bilgi sorularında öğrencilerin daha yetersiz olduğu görülmüş, ders başarısı düşük-orta düzeyde olan birkaç öğrencinin işlem hatası dışında, öğrencilerin çoğunun işlemsel bilgi ve beceri gerektiren sorularda daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Bu bölümde araştırmanın alt problemlerine yönelik bulgular açıklanmıştır.

3.1. Öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunda kavramsal ve işlemsel anlamayı gerçekleştirmek için ön bilgilerine ait bulgular

Öğrencilerin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunda kavramsal ve işlemsel anlamayı gerçekleştirmek için ön bilgileri Ders planı -1 ve Ders planı-2 de incelenmiştir.

Ders planı-1'de, ''Basit cebirsel ifadeleri anlar ve farklı biçimlerde yazar'' kazanımının giriş aşamasında yapılan öğrenciler 'Kalemlerimin 4 katının 2 eksiğini Gül'e verdim, Gül'e verdiğim kalemlerimin sayısı kaçtır?, Sınıfımızda kızların sayısı erkeklerin sayısının 1 fazlasının 2 katına eşit ise, erkeklerin sayısı kaçtır?, Yumurtaların çeyreğinin 5 fazlası kırık ise kırık yumurtaların sayısı kaçtır?, Bir sayının karesi nasıl bulunur?, Selma ile Seher'in kitaplarının toplamı kaçtır?' sözel ifadelerine uygun cebirsel ifadeleri rahatlıkla yazabilmişlerdir. Keşfetme aşamasında öğrenciler terim, katsayı ve sabit terimleri belirleyebilmişlerdir; ancak çoğu öğrencinin sabit terimin de bir katsayı olduğunu hatırlamadıkları görülmüştür. Öğrencilere tabloda bu kısmı boş bırakmaları istenerek, açıklama bölümünde sabit terimin de bir katsayı olduğu hatırlatılmıştır. Derinleştirme aşamasında, verilen sorularda öğrencilerin çoğu sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeleri ve cebirsel ifadelere uygun sözel ifadeleri yazabilmişler, bu cebirsel ifadelerin terim, katsayı, sabit terimlerini belirleyebilmişler ve cebirsel ifadeleri farklı biçimde yazabilmişlerdir. Değerlendirme aşamasında ise tüm öğrenciler soruları eksiksiz şekilde tamamlamışlardır. Ö11 kodlu öğrencinin değerlendirme aşamasındaki çözümü Şekil 6' da verilmiştir.


2. Aşağıda verilen cebirsel ifadelere uygun sözel ifadelere yazınız.

a) $x^2 + 6$

Bir sayının karesinin 6 fazlası

b) $7x + 4y - 3$

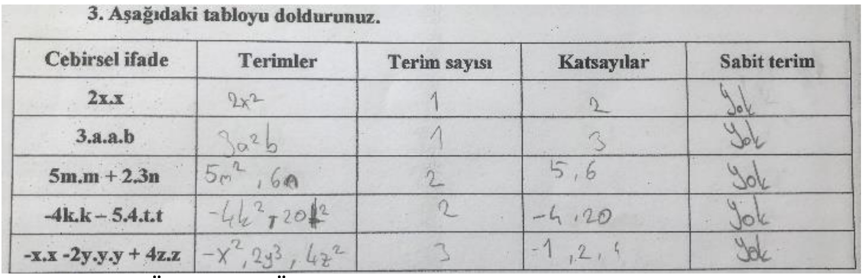
bir sayının 7 katının başka bir sayının 4 katıyla toplamının 3 eksiği

c) $6.(a^2 - 1)$

bir sayının karesinin 1 eksiğinin 6 katı

Şekil 6. Ö11 Kodlu Öğrencinin Değerlendirme Aşamasındaki Çözümü

Öğrenciler kavramsal anlamaya yönelik değişken kavramını anlayarak, sözel ifadeye uygun cebirsel ifade ve cebirsel ifadeye uygun sözel ifade yazabilmişlerdir, bunun yanında terimlerin arasındaki toplama ve çıkarma işlemlerine göre cebirsel ifadenin terimlerini belirleyebilmişlerdir. Ancak derinleştirme aşamasında işlemsel anlamaya yönelik benzer terimeler arasında işlem yapması gereken soruda Ö6 kodlu öğrencinin, (-a.b) + (-a.b) + (-a.b) ifadesini düzelerken $-ab^3$ ifadesini yazdığı görülmüştür. Bu aşamada terimlerin arasındaki aradaki toplama işlemine öğrencinin dikkati çekilerek çözümünü kontrol etmeye yönlendirilmiş ve Ö6 gibi benzer işlem hatası yapan öğrencilerin hatalarını düzletme fırsatı sunulmuştur. Artık değerlendirme aşamasında tüm öğrencilerin işlemsel beceri gerektiren soruları doğru bir şekilde cevapladıkları görülmüştür. Ö19 kodlu öğrencinin değerlendirme aşamasındaki çözümü Şekil 7'de verilmiştir.


3. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

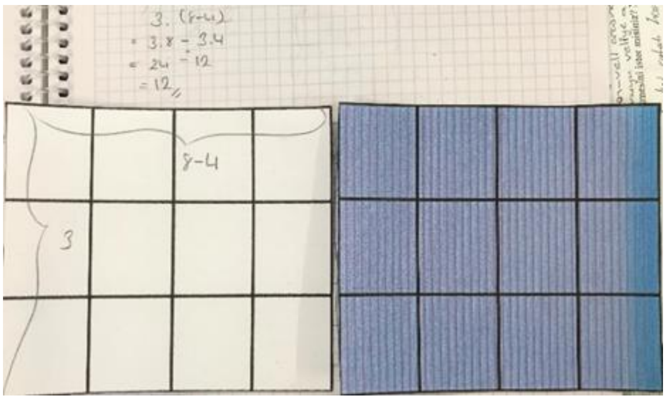
Cebirsel ifade	Terimler	Terim sayısı	Katsayılar	Sabit terim
2x.x	$2x^2$	1	2	Yok
3.a.a.b	$3a^2b$	1	3	Yok
5m.m + 2.3n	$5m^2$, 6n	2	5, 6	Yok
-4k.k – 5.4.t.t	$-4k^2$, $20t^2$	2	-4, 20	Yok
-x.x -2y.y.y + 4z.z	$-x^2$, $2y^3$, $4z^2$	3	-1, 2, 4	Yok

Şekil 7. Ö19 Kodlu Öğrencinin Değerlendirme Aşamasındaki Çözümü

Bu süreçte öğrencilerin benzer terimler arasında aritmetik işlemler yaparak ve cebirsel ifadeleri farklı biçimde yazarak konuya dair işlemsel anlamalarının oluştuğu belirlenmiştir. Ayrıca 5E öğretim modeli aracılığıyla, kazanımların kavramsal ve işlemsel anlaşılmasının birbirini destekler şekilde öğrencilere yaşatılmış olduğu söylenebilir.

Ders planı-2'de, 'Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar.' ve 'Ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır.' kazanımları için hazırlanan giriş aşamasında, dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanarak iki cebirsel ifadeyi çarpmaya yönelik bir etkinlikle giriş yapılmıştır. Bu etkinlikte öğrenciler dikdörtgenlerin alan bağıntısından yola çıkarak, cebirsel ifadeler arasında çarpma işlemini rahatça yapabildikleri görülmüştür.

Keşfetme etkinliğinde, cebirsel ifadelerde çarpmaya geçmeden önce öğrencilerin dikdörtgensel bölgelerin alan bağıntılarını kullanarak, farklı örneklerle çarpmanın toplama ve çıkarma üzerinde dağılma özelliği anlamlandırmalarını sağlanması amaçlanmıştır. Bu aşamada Ö7 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 8'de verilmiştir.



Şekil 8. Ö7 Kodlu Öğrencinin Keşfetme Aşamasındaki Çözümü

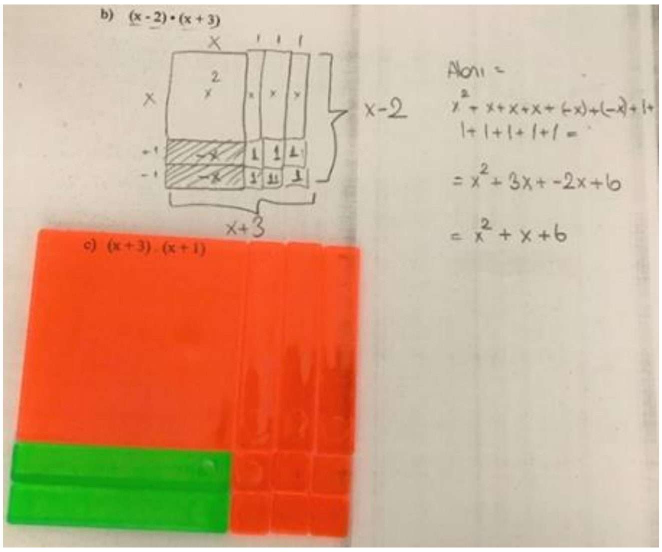
Öğrenciler dağılma özelliğini önceki sınıflarda da gördükleri için, eski bilgilerini kullanarak bu etkinlikte zorlanmadıkları, ön uygulamada eksiği olan başarı düzeyi düşük olan öğrenciler de bu sayede dağılma özelliğini hatırladıkları gözlenmiştir.

Yine keşfetme etkinliği olarak öğrencilerin artık cebir karoları ile modellemeler yaparak cebirsel ifadelerin çarpımını kavramsal olarak anlamasını sağlamak amacıyla, öncelikle her öğrenciye modellemeleri deneyimlemesi için cebir karoları dağıtılarak, cebir karolarının kenar uzunlukları ve alanları tanıtılmıştır. Cebirsel ifadelerde çarpma işlemi, farklı biçimdeki 2.(x+3), x.(x+2), (x+3).(2x-1) işlemlerini cebir karoları ile modellenerek açıklanmıştır. Bu aşama soru cevap şeklinde ilerlenmiş, öğrencilerden modellemeleri oluşturmaları ve onlara sorular sorarak fikirlerini sunmaları ve yorumda bulunmaları istenmiştir. Bu sayede kazanımın kavramsal olarak anlaşılmasının, işlemsel anlamayı destekleyici şekilde oluşturulması sağlanmıştır. (x+3).(2x-1) ifadesinin modelleme çalışmaları için araştırmacı ile öğrenciler arasında gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir.

A: Şimdi oluşturacağımız dikdörtgenin kenarlarını ve gereken cebir karolarını belirleyelim.
Ö4: Kenarlar (x+3) ve (2x-1) olacak. (Öğrencilerin çoğu söyleyebilmişlerdir)
Ö10: Bir tane alanı x^2 lik, üç tane de x lik olan karoları alırız. Bu kenarı (x+3) oldu.
Ö17: Bir de bunun altında yine x^2 lik koyarız 2x olur.
Ö6: En alta da burası -1 olan bunu alırız (kısa kenarı -1 olan negatifi temsil eden cebir karosunu gösteriyor).

Öğrenciler ilk iki çarpma işleminden sonra artık verilen çarpma işlemini bir dikdörtgenin alanı olarak modelleyebilmişler, bu dikdörtgenin alanını ise hem modellemede kullanılan parçaların alanlarını toplayarak kavramsal açıdan, hem de (x+3).(2x-1) ifadesinde dağılma özelliğini kullanarak işlemsel olarak bulabilmişler ve sonuçların birbirine eşit olduğunu gösterebilmişlerdir. Öğrencilerin açıklamalarından sonra yapılan modelleme tekrar edilmiş ve negatif cebir karolarına dikkat çekilerek, vurgulanmıştır. Daha sonra da işlem üzerinde dağılma özelliği tekrar anlatılarak derinleştirme aşamasına geçilmiştir.

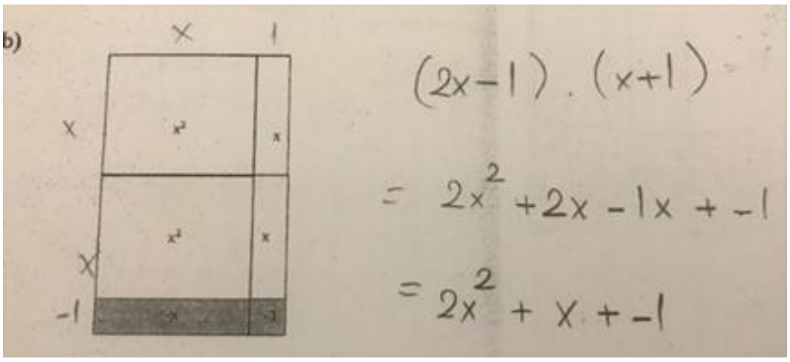
Derinleştirme aşamasında öğrencilere cebir karoları dağıtılmış ve öğrencilerden verilen cebirsel ifadelerin çarpımlarını, cebir karolarını kullanarak modellemeleri ve verilen modellemeye uygun cebirsel ifadelerin yazılması istenmiştir. Bu aşamada Ö20 kodlu öğrencinin b şıkkına dair çözümü Şekil 9'da verilmiştir.



Şekil 9. 11 Ö20 Kodlu Öğrencinin b Şıkkına Çözümü

Şekil 9'da görüldüğü gibi, Ö20 önce modellemeyi cebir karoları ile oluşturmuş sonra da çizim yaparak göstermiştir. Aynı zamanda oluşturduğu şeklin alanını, kullandığı parçaların alanları toplamına eşit olduğunu göstererek işlemsel olarak bir algoritma geliştirmiştir. Ancak yeşil olan -1 br²'lik karoları kullanması gereken yerde +1 br²'lik karolarını kullanan Ö20'ye cebirsel ifadeleri tekrar dağılma özelliğini kullanarak çarpması istenmiş ve hatasını görmesi sağlanmıştır. Ö20, modellemesini inceleyerek ve dikdörtgenin kenar uzunluklarını kontrol ederek hatasının farkına varıp kendi cevabını değerlendirerek düzeltmiştir. Dolayısıyla Ö20 için, sorunun kavramsal anlamanın oluştuğu söylenebilir. Aynı zamanda dağılma özelliğini uygulayarak sonucunu doğruladığından işlemsel olarak da anlamanın sağlanmış olduğu söylenebilir.

Derinleştirme aşamasının diğer bir sorusunda, öğrencilere verilen modellemelere uygun cebirsel ifadeleri yazmaları istenmiştir. Ö20 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 10'da verilmiştir.



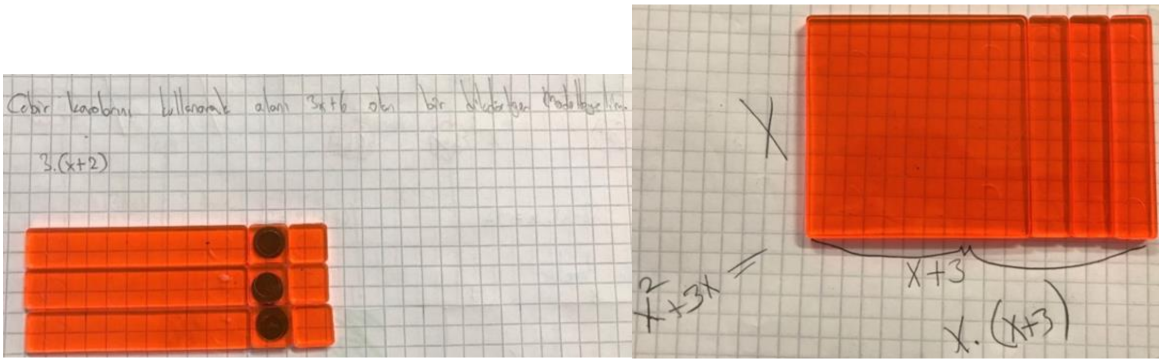
Şekil 10. Ö20 Kodlu Öğrencinin b Şıkkına Çözümü

Ö20, ilk soruda negatif terimleri göz ardı ederek yaptığı çözüm yapmıştı. Bu soruda artık cebir karolarına dikkat ederek modellemeyi yorumlayabilmiş ve sonuca ulaşmıştır. Bu çalışma da modellemeler hazır verildiğinde öğrenciler, cebir karolarına hakim oldukları için cebirsel ifadenin çarpımı sorularını kavramsal olarak daha rahat cevaplayabilmişlerdir.

Öğrenciler ders planı 2'nin bu aşamasında modellemeler kullanarak cebirsel ifadenin çarpanlarını belirlemişler ve cebirsel ifadeler ile çarpma işlemini modellemeler kullanarak temsiller arası geçiş yapabilmişlerdir. Ayrıca verilen modeli yorumlayarak cebirsel ifadelerin çarpımını yazabilmiştir. Böylece kavramsal anlamanın sağlandığı söylenebilir. Aynı zamanda bu aşama sırasında öğrenciler harfli ifadeler arasında çarpma işlemini yapabilmiş, 2.(x+3), x.(x+2), (x+3).(2x-1) ifadelerinin çarpımında, çarpmanın toplama ve çıkarma üzerine dağılma özelliğini uygulayabilmiş, verilen modele uygun oluşturduğu cebirsel ifadelerin çarpımında da dağılma özelliği kuralını uygulayabilmiştir. Öğrenciler toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğinin anlamını bu sayede daha rahat kavradıkları ve uygulayabildikleri; dolayısıyla işlemsel anlamanın de bu sayede desteklendiği gözlenmiştir. Ayrıca somut materyallerle çalışılması uygulamaya olan ilgiyi ve katılımı arttırmıştır. Ders planının farklı aşamalarında öğrenciler cebirsel ifadelerin çarpımını kavramsal ve işlemsel boyutta inşa etme fırsatı bulmuş oldular.

Cebirsel ifadelerde çarpma işleminin değerlendirme aşamasına geçilmeden, öğrenciler ilk dönem görmüş oldukları çarpanlar ve katlar konusundan yararlanarak, çarpan kavramını kolayca hatırlamış, dikdörtgenin kenar uzunluklarının birer çarpan olduğu fark etmişler ve böylece 'çarpanlarına ayırma' konusuna giriş yapılmıştır. 'Ortak çarpanı parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır' kazanımına yönelik keşfetme etkinliği ile devam edilmiştir.

Keşfetme aşamasında öğrencilerden cebir karolarını kullanarak, alanı 3x+6 ve x^2+3x olan dikdörtgen oluşturmaları istenmiştir. Daha sonra oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarını, modellemelerindeki kenar uzunluklarını belirleyerek bulmaları istenmiştir. Ö19 ve Ö18 kodlu öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar sırasıyla Şekil 11'de verilmiştir.



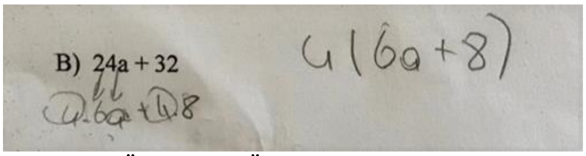
Şekil 11. Ö19 ve Ö18 Kodlu Öğrencinin Keşfetme Aşamasındaki Çözümü

Ö19 ve Ö18 gibi diğer öğrenciler de verilen cebirsel ifadeyi bir dikdörtgen şeklinde modelleyerek, iki cebirsel ifadeni çarpımı şeklinde yazabilmiş ve ortak çarpanı belirleyebilmişlerdir. Bu bağlamda öğrenciler oluşturdukları modeller üzerinden cebir ve geometri arasında ilişki kurabilmiş olmaları, öğrencilerin cebirsel ifadelerde ortak çarpan parantezine alma konusunda kavramsal anlamayı sağlayabilmişlerdir. Bu bağlamda kazanımın işlemsel olarak da anlaşılması amacıyla, öğrencilerden önceki bilgilerini hatırlanması ve ortak çarpan parantezine almayı işlemsel olarak nasıl yapılacağının düşünülmesi istenmiştir. Bu aşamada gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir.

A: Peki çarpanlar katlar konusunda ortak bölen veya ortak katları buluyorduk hatırladınız mı? Örneğin, 8 ile 10 sayılarının ortak çarpanları nedir?
Ö2: İkisi de 2'ye bölünür.
A: Nasıl olduğunu açıklar mısın Ö2?
Ö2: 8, 2.4' e eşittir. 10'da 2.5'e eşittir. O zaman 2 ortak çarpan olur.
A: Evet, peki (x^2+3x) ifadesindeki terimlerin ortak çarpanı için ne düşünürsünüz?
Ö3: Bunun (x^2+3x) terimlerinde x çarpanı var
A: Nasıl olduğunu açıklar mısın?
Ö3: x^2, x çarpı x, 3x de 3 çarpı x olarak yazılırsa ikisinde de ortak olan x olur.
A: Evet çok doğru. Bu durumu herkes anladı mı? (tüm öğrenciler onay vermişleridir) O halde x ortak ise x^2+3x ifadesini, çarpım şeklinde nasıl yazarız?
Ö3: Ortak çarpanı kullanarak x.(x+3) olarak yazarız.
A: Aynen bu şekilde yazılır. Peki 3x+6 ifadesini nasıl çarpım şeklinde yazarız?
Ö5: Burada 3 ortak.
A: Nasıl olduğunu gösterebilir misin?
Ö5: 3x, 3 çarpı x, 6 da 3 çarpı 2'ye eşittir 3 ortak olur. 3.(x+2) olarak yazılır.

Öncelikle çarpanlar katlar konusunda görmüş oldukları ortak kat, ortak bölen kavramının hatırlatılarak, öğrencilerin konu üzerinde düşünmeleri sağlanmış, öğrencilerin sayıların ortak bölenini bulabildiği ve ortak çarpan ifadesine ulaşmış olduğu görülmüştür. Daha sonra, verilen cebirsel ifadedeki terimlerin çarpanları ve bu çarpanlardan ortak olanların bulunması istendiğinde, bu sonuçtan yola çıkarak öğrenciler terimlerin çarpanlarından ortak olanları belirleyebilmişlerdir. Böylece öğrenciler işlemsel bir algoritma geliştirerek cebirsel ifadelerin ortak çarpanlarına ulaşabilmişlerdir. Bu bağlamda öğrenciler ortak çarpan parantezine alma yöntemini işlemsel bilgilerini kullanarak ifade edebildikleri söylenebilir. Açıklama aşamasında, cebirsel ifadeleri ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile çarpanlara ayrılması işlemsel olarak anlatılmıştır.

Derinleştirme aşamasında, öğrencilerden 5x + 5y, 24a + 32, $12m^2n - 8mn^2$, $18x^3 - 27x^2 + 36x$, $8a^2b - 6ab^2$ cebirsel ifadeleri modelleme yapmadan, işlemsel bilgilerini kullanarak ortak çarpan parantezine alma yöntemiyle çarpanlarının bulunması istenen soruda öğrencilerin tümü ilk sorudaki ifadeyi kolaylıkla çarpanlarına ayırabilmişlerdir. Ardından 24a + 32 ifadesine ait Ö11 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 12'de verilmiştir.

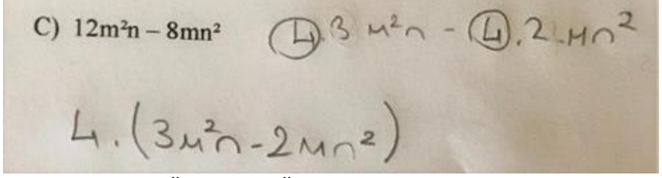


Şekil 12. Ö11 Kodlu Öğrencinin B Şıkkına Çözümü

Ö11, 24a + 32 ifadesinde ortak çarpanlardan en büyüğünü değil, herhangi bir ortak çarpanı bularak işlem yapmıştır. Ö11'in onayı ile çözümü tahtada irdelenmiş ve tüm öğrencilerin çözümü ve açıklamaları görmeleri sağlanmış, fikir yürütmeleri istenmiştir. Bu aşamada gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir.

Ö: 24a+32 = 4.(6a+8) eşitliği doğru bir şekilde ortak çarpan parantezine alınmış mıdır?
Ö10: Evet, 24'de 32'de 4'e bölünür.
Ö: Peki 6a+8 ifadesinin terimlerinde ortak çarpan var mı?
Ö7: Evet var onlar 2'ye bölünür.
Ö: Bu durumda ne almalıyız ortak çarpanı?
Ö9: O zaman 8 alırız yani 2.4
Ö11: En büyük çarpanını alırız.
Ö: Evet doğru, aslında Ö11'in çözümü (24a+32 = 4.(6a+8)'i göstererek) yanlış değil; ancak verilen cebirsel ifadenin terimlerinin ortak çarpanlarından en büyüğünü seçersek daha doğru bir eşitlik sağlamış oluruz.

Öğrencilere yönlendirilen sorular ile gerçekleşen tartışma ortamında hem Ö11 hem de bu soruda hatası olan diğer öğrencilerde terimlerin ortak olan çarpanlarından en büyüğünü tespit ederek, ortak çarpanın belirlenmesini işlemsel olarak anlamış oldular. Daha sonra $12m^2n - 8mn^2$ ifadesinde ait Ö3'ün çözümü Şekil 13'de verilmiştir.



Şekil 13. Ö3 Kodlu Öğrencinin C Şıkkına Çözümü

Şekil 13 de, Ö3 terimlerin katsayılarının ortak çarpanlarının en büyüğünü aalmış olmasına rağmen, ortak değişkenleri göremeyen üç öğrenci olmuştur. Ö3 kodlu öğrenci, yaptığı çözümünü tahtada anlatırken gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir:

Ö: Ortak çarpanı nasıl belirledin Ö3?
Ö3: 12 ve 8'i bölen sayı 4.
Ö: Peki terimlerdeki değişkenleri de inceler misin? Terimlerin değişkenlerinde ortak çarpanlar hangileri?
Ö3: Evet, m'ler ve n'ler ortak.
Ö: Nasıl olduğunu açıklar mısın?
Ö3: m^2, m.m dir, n^2 de n.n dir.
Ö11: O zaman ortak çarpanı 4mn'dir.

Bu aşamada tahtada yapılan çözüm ve açıklamalar ile öğrenciler, değişkenlerin üslü ifadelerini çarpım şeklinde yazarak, değişkenlerdeki ortak olan çarpanlarını belirlemeyi işlemsel olarak görmüşlerdir. Böylelikle diğer sorularda tüm öğrenciler verilen cebirsel ifadelerin hem katsayıların hem de değişkenlerin ortak çarpanına ulaşarak ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile çarpanlara ayırabilme kazanımına dair işlemsel anlamayı sağlayabilmişlerdir.

Ders planının sonunda artık öğrencilerin 'ortak paranteze alma yöntemi ile çarpanlara ayırabilme' kazanımına yönelik kavramsal olarak, ortak çarpan kavramını anlayabilmişler, alanı 3x+6, x^2+3x şeklinde verilmiş olan dikdörtgenleri modelleyerek, kenar uzunluklarını belirleyebilmişlerdir. İşlemsel olarak ise ortak çarpanı, çarpanlar-katlar konusu ile ilişkilendirme yaparak belirlemişler, cebirsel ifadelerde terimlerin katsayılarının ortak çarpanlarının en büyüğünü elde edebilmişler, cebirsel ifadelerdeki üslü şekilde verilmiş değişkenleri (m^2) çarpım şeklinde yazarak (m.m), ortak çarpanı elde edebilmişler ve cebirsel ifadeleri, ortak katsayıları ve değişkenleri göz önüne alarak ortak çarpan parantezine alabilmişlerdir.

Ders planının değerlendirme aşamasında, 'Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar' ve 'Ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır' kazanımlarına yönelik kavramsal ve işlemsel anlamanın ne ölçüde oluştuğunu görmek için hem modelleme içeren, hem işlemsel bilginin kullanılması gereken soru tiplerine öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlamaları bir arada olarak ölçülmüştür. Tüm öğrenciler bu iki bilgi türünde, hem süreç boyunca hem de değerlendirme sorularındaki cevaplarda gelişimlerini göstermişlerdir. Bunun yanında özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna başlamadan ön bilgilerini tamamlayarak, eksikliklerini gidererek konuya hazır olmaları sağlanmıştır.

3.2. Özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun öğreniminde öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama süreçlerine ait bulgular

Bu bölümde ''Özdeşlikleri modellerle açıklar.'' ve ''$a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ ve $a^2 - b^2$'biçimindeki ifadeleri çarpanlarına ayırır.'' kazanımları için hazırlanan ders planı-3'ün uygulamasından elde edilen bulgular sunulmuştur.

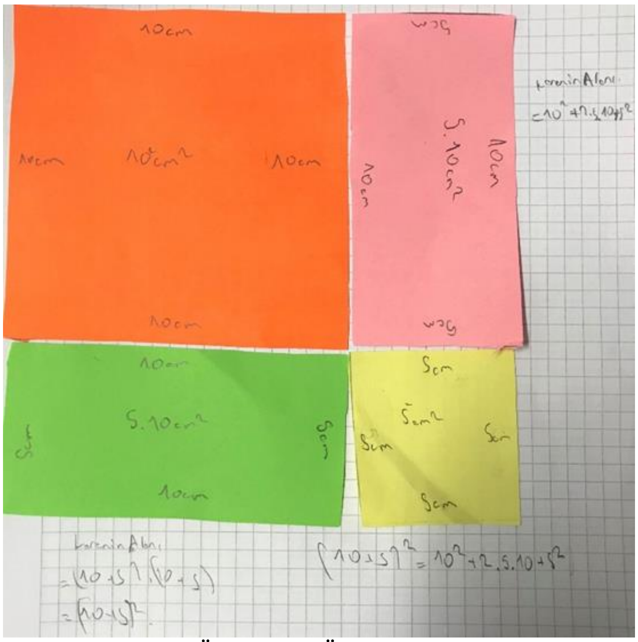
Giriş aşamasında öğrencilere farklı eşitlikler verilmiş, öğrenciler bu eşitliklerdeki bilinmeyen yerine farklı değerler koyarak, bazı eşitliklerin her durumda iki tarafının da aynı olduğunu görmüşlerdir. Daha sonra öğrencilere verilen $2.(x + 4) = 2x + 8$, $2 – x = x + 2$, $- (4a + 7) = - 4a – 7$, $9m + 7m = 16m$, $(3x)^2 = 3x^2$ eşitliklerinden hangisinin her iki tarafının her durumda eşit olduğu sorulduğunda, çoğu öğrenci aritmetik işlemler yaparak 1., 3. ve 4. eşitlikleri göstermişlerdir. Daha sonra öğrenciler bilinmeyen yerine farklı sayılar koyarak, diğer eşitliklerdeki bilinmeyenlerin, tek bir değere sahip olduğunu buldular ve bu eşitlikleri eski bilgilerini de hatırlayarak denklem olduğunu söylediler. Burada özdeşlik kavramını sezdirmek için geçen diyalog şu şeklidedir.

A: Bulduğunuz denklemler ile diğer eşitliklerin arasındaki fark nedir?
Ö13: Diğerlerinde x'e ne verirsek hep eşit çıkar.
Ö5: Ama denklemde x'in tek bir değeri vardır.
A: Evet çok doğru. O halde bu eşitlikleri nasıl tanımlarsınız?
Ö19: Değişkenin yerine hangi sayı gelirse gelsin sağ taraf sol tarafa eşit olur.

Böylelikle özdeşlik kavramını ve özdeşlik ile denklem arasındaki farkın anlaşılmasında işlemsel bilginin, kavramsal anlamayı destekleyerek oluşturduğu söylenebilir.

3.2.1. İki Terimin Toplamının Karesi Özdeşliğine Yönelik Bulgular

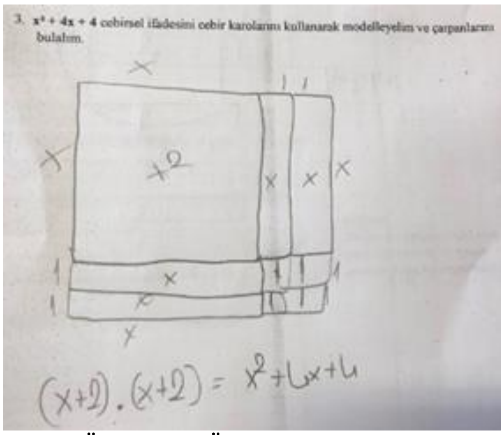
Keşfetme aşamasında, iki terimin toplamının karesi özdeşliğinin kavramsal olarak anlaşılmasının sağlanması amacıyla yapılan etkinlikte Ö11 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 14'de verilmiştir.



Şekil 14. Ö11 Kodlu Öğrencinin Çalışması

Şekil 14 de verilen Ö11in çözümü gibi diğer öğrenciler de oluşturdukları karenin alanını, hem parçaların alanları toplamından hem de karenin alan bağıntısından bularak, iki durumun birbirine eşitlemişler ve $(10+5)^2$ifadesinin, üç terimli $10^2+2.5.10+5^2$ ifadesine özdeş olduğunu modelleme yoluyla anlamış oldular. Açıklama kısmında öğrencilerin bir önceki aşamada keşfetmiş oldukları, $(a+b)^2$ifadesinin özdeşinin işlemsel olarak, birinci terimin karesi, birinci ve ikinci teriminin çarpımının iki katı ile ikinci terimin karesinin toplamı şeklinde bulunacağı tekrar açıklanmıştır.

Derinleştirme aşamasında, $(x + 5)^2$, $(2a + 3)^2$, $(k + 4m)^2$ ifadelerinin iki terimin toplamının karesi özdeşliğinden yararlanarak verilen ifadelerin açılımlarını yazarken bazı öğrenciler $(2a + 3)^2$ ifadesinde katsayının karesini almadan çözüm yaptığı görülmüştür. Öğrencilere yapılan ufak bir hatırlatmayla katsayısı olan bir değişkenin karesini alırken yaptıkları çözümü kontrol etmeleri istenerek hatalarını düzelttikleri görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerde bu özdeşliğe dair işlemsel anlamanın sağlanmış olduğu gözlenmiştir. Çalışma yaprağının diğer sorularında cebir karolarını kullanarak verilen cebirsel ifadelerinin modellemesini çizmeleri ve oluşturdukları şeklin alan bağıntısından yararlanarak verilen üç terimli ifadelerin çarpanlarının bulunması istenmiştir. Ö12 kodlu öğrencinin örnek çözümü Şekil 15'de verilmiştir.



Şekil 15. Ö12 Kodlu Öğrencinin 3. Soruya Çözümü

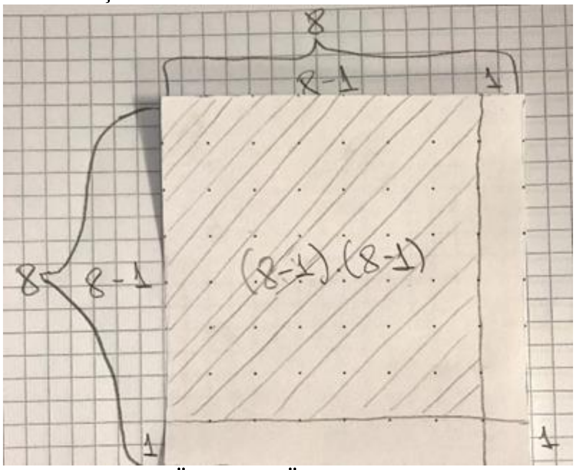
Ö12 gibi diğer öğrencilerinde önce hangi cebir karolarını kullanacaklarına karar vererek üç terimli bir ifadeyi modelleyebilmiş olmaları, kavramsal bilgiyi kullanmış olduğunu göstermektedir. Aynı zamanda oluşturdukları kare modelinin kenar uzunluklarını kullanarak hem karenin alan bağıntısından hem de cebir karolarının parçalarının alanları toplamından özdeşliği yazabilmiş ve verilen cebirsel ifadelerin çarpanlarına ulaşmışlardır. Bu bağlamda öğrenciler, modellemelerden yararlanarak verilen üç terimli bir ifadenin çarpanlarını, oluşturdukları karenin birer kenarının cebirsel ifadenin çarpanları olduğunu kavramsal boyutta keşfetmiş oldular. Bu aşama, aynı zamanda $a^2 + 2ab + b^2$ ifadesinin çarpanlarına ayrılması kazanımına yönelik bir keşfetme etkinliği olarak uygulanmıştır. Açıklama aşamasında $x^2 + 4x + 4$ cebirsel ifadesinin çarpanlarına ayrılması yöntemi işlemsel olarak açıklanarak (x+2)'nin verilen cebirsel ifadenin bir çarpanı olduğu gösterilmiştir.

Derinleştirme aşamasında, öğrenciler $a^2 + 2ab + b^2$ ifadesinin çarpanlara ayrılmasına yönelik hem modelleme istenen kavramsal soruları, hem de işlemsel bilginin ölçüldüğü soruları doğru biçimde cevaplamışlardır.

Tüm öğrenciler öğretim süreci boyunca, iki terimin toplamının karesi özdeşliğine ve çarpanlarına ayrılmasına yönelik kazanımları, kavramsal açıdan özdeşlik kavramını tanıyabilmiş, özdeşlik ile denklemi ayırt edebilmiş, geometrik modellemeleri ve bağıntıları kullanarak özdeşliği oluşturabilmiş, sayısal olarak elde ettiği özdeşliği harfli ifadelere genelleyebilmiş, üç terimli cebirsel ifadeleri geometrik olarak modelleyebilmiş ve çarpanlarına ulaşabilmiş, geometrik modeli verilen özdeşliği ve çarpanlarını belirleyebilmişlerdir. Diğer taraftan işlemsel açıdan ise karenin alan bağıntısını harfli terimler üzerinde ifade edebilmiş, iki terimin karesinin toplamı özdeşliğinin açılımını formül kullanarak yapabilmiş, üç terimli cebirsel ifadeleri formül kullanarak çarpanlarına ayırabilmişlerdir. Bu bağlamda iki terimin toplamının karesi özdeşliğine ve çarpanlarına ayrılması konusu, kavramsal ve işlemsel olarak anlaşılması, ders planının farklı aşamalarında yinelemeli olarak desteklenmiştir.

3.2.2. İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliğine Yönelik Bulgular

Keşfetme aşamasında, iki terimin farkının karesi özdeşliğinin kavramsal olarak anlaşılmasının sağlanması amacıyla yapılan etkinlikte, öğrenciler uygulamaları birebir kendileri yapmışlar ve bu aşamada Ö5 kodlu öğrencinin çalışması Şekil 16 ’da verilmiştir.



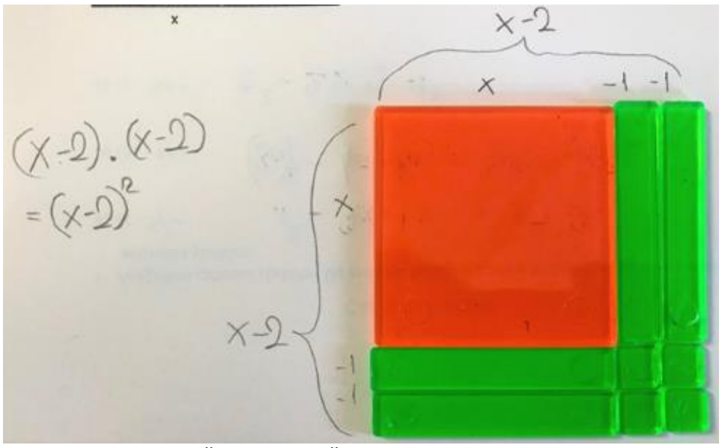
Şekil 16. Ö5 Kodlu Öğrencinin Çalışması

Şekil 16’da verilen öğrenci çözümü üzerine araştırmacı ve öğrencilerle gerçekleşen diyalog verilmiştir.

Ö: Kenar uzunluğu (8-1) birim olan kareyi, elinizdeki kareden nasıl oluşturdunuz?
Ö11: Kenarından 1cm, buradan da kestim (karenin diğer kenarını gösteriyor)
Ö: Peki kalan karenin alanını nasıl buldunuz?
Ö5: İki kenarını çarparak buldum.
Ö: Karenin alanını farklı bir şekilde bulabilir miyiz?
Ö20: Tüm şekilden kestiğimiz yerleri çıkartarak.
Ö: Çok doğru, şimdi tüm karenin alanından kestiğimiz kısımların alanlarını çıkararak kalan karenin alanını bulalım.

Burada çoğu öğrenci kenarı 8 birim olan karelerden, bir kenarı 1 birim olan parçaları kendileri belirleyip kestikleri için parçaların kesişimlerindeki, kenarı 1 birim olan karesel bölgenin, yaptıkları işlemde iki kere çıkarıldığını fark edebildiler. Dolayısıyla o bölgenin alanını eklememiz gerektiğini söylediler. Ancak etkinlikte istenen alanı bulamayan ve özdeşliğe ulaşamayan öğrenciler için sınıfta soru-cevap ile yapılan tartışma ortamı ve tahtada yapılan çözümler ile bu öğrencilere özdeşliği kavramsal olarak anlama fırsatı sunulmuştur. Bunun yanında iki terimin farkının karesi özdeşliğinin kavramsal olarak anlaşılmasına destek olması ve daha kalıcı olması amacıyla, kenar uzunluğu farklı olan kareler verilerek aynı etkinliğin uygulanması istenmiş, böylece öğrenciler iki terimin farkının karesi özdeşliğine, bir kare modeli üzerinden, kendileri deneyimleyerek kavramsal olarak yeterlilik kazanmış oldular. Açıklama kısmında iki terimin farkının karesi özdeşliğinin açılımının nasıl yapılacağı işlemsel olarak tekrar açıklanmıştır.

Derinleştirme aşamasının ilk sorusunda, $(x - 7)^2$, $(3a - 4)^2$, $(z – 2t)^2$, cebirsel ifadelerinin, iki terimin farkının karesi özdeşliğinden yararlanarak eşitinin bulunması istenmiş ve öğrenciler terimlerin katsayılarını da göz önüne alarak doğru sonuca ulaşmışlardır. Buradan öğrencilerin iki terimin farkının karesi özdeşliğinin açılımına dair işlemsel anlama yeterliliğine ulaşmış olduğu görülmüştür. Çalışma kağıdının diğer sorularında öğrencilere cebir karoları dağıtılarak, $x^2 - 4x + 4$ ve $x^2 - 6x + 9$ cebirsel ifadelerini modellemeleri, oluşturacakları karenin alan bağıntısından cebirsel ifadelerin çarpanlarına ulaşılması istenmiştir. Ö20 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 17’de verilmiştir.



Şekil 17. Ö20 Kodlu Öğrencinin 2. Soruya Yanıtı

Bu aşamada Ö20 ile gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir.

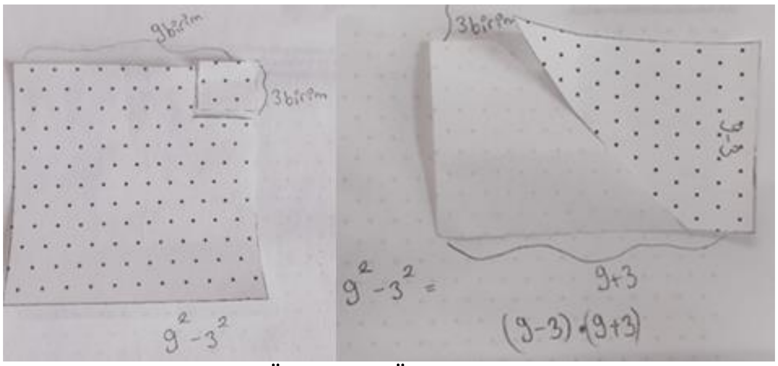
Ö: Oluşturduğun modelin alanı, verilen cebirsel ifadeye eşit olup olmadığını kontrol eder misin?
Ö20: Bu parçaların alanlarını toplarsam x^2-4x-4 olur. Buna eşit değil. (x^2-4x+4 sorusunu gösteriyor)
Ö: O halde modellemeni yeniden kontrol eder misin?
Ö20: Bir tane x^2, dört tane -x ve dört tane +1 lazım o zaman 4 olur. Buraya turunculardan koymalıyım çünkü artı onlar. (1 br^2 lik cebir karolarının gösteriyor)

Burada Ö20 başta modellemiş olduğu kareyi yorumlarken -1br^2 yi temsil eden yeşil karolar yerine, +1br^2 yi temsil eden turuncu karoları kullanması gerektiğini kendisi fark etmiştir. Ö20 gibi negatif cebir karolarını hatalı kullanan öğrenciler de bu aşamada yapılan açıklamalarla modellemelerini düzelterek, hatalarını keşfetmeleri sağlanmış ve diğer soruda bu duruma dikkat ederek çözümlerini yapmışlardır. Böylelikle öğrenciler oluşturdukları karenin kenar uzunluklarının, verilen cebirsel ifadenin çarpanı olduğunu kavramsal olarak anlamış olduğu söylenebilir. Bu aşama, verilen ikinci dereceden cebirsel ifadelerin çarpanlarına ayrılmasının keşfetme etkinliği olarak yapılanmıştır. Açıklama aşamasında x^2-6x+9 cebirsel ifadesinin çarpanlarına ayrılması yöntemi işlemsel olarak anlatılarak, (x-3)'ün verilen cebirsel ifadenin bir çarpanı olduğu gösterilmiştir.

Derinleştirme aşamasında, öğrenciler $9m^2$ - 42m + 49, $25a^2$ - 80ab + $64b^2$ üç terimli ifadelerin çarpanlarını işlemsel bilgilerini kullanarak bulabilmişler, modelleme istenen kavramsal soruları doğru biçimde cevaplamışlardır. Dolayısıyla dersin sonunda tüm öğrenciler iki teriminin farkının karesi özdeşliğine ve çarpanlarına ayrılmasına yönelik kazanımları, kavramsal açıdan karenin alan bağıntısını kullanarak iki terimin farkının karesine özdeş olan ifadeyi belirleyebilmiş, sayısal olarak elde ettiği özdeşliği harfli ifadelere genelleyebilmiş, üç terimli cebirsel ifadeleri geometrik olarak modelleyebilmiş ve çarpanlarına ulaşabilmiş, geometrik modeli verilen özdeşliği ve çarpanlarını belirleyebilmişlerdir. Bunun yanında işlemsel açıdan ise iki terimin farkının karesi özdeşliğinin açılımını formül kullanarak yapabilmiş, üç terimli cebirsel ifadelerin çarpanlarına, iki terimin farkının karesi özdeşliğinin kuralını kullanarak ulaşabilmişlerdir. Dolayısıyla iki terimin farkının karesi özdeşliği ve çarpanlara ayrılması, 5E modelinin aşamalarında, kavramsal ve işlemsel anlamanın birbirini destekler şekilde tüm öğrenciler tarafından deneyimlendiği söylenebilir.

3.2.3. *İki Kare Farkı Özdeşliğine Yönelik Bulgular*

Keşfetme aşamasında, iki kare farkı özdeşliğinin kavramsal anlamanın sağlanması amacıyla yapılan etkinliğin daha kolay ve anlaşılır olması açısından noktalı veya kareli kağıt kullanılmıştır. Ö12 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 18'de verilmiştir.



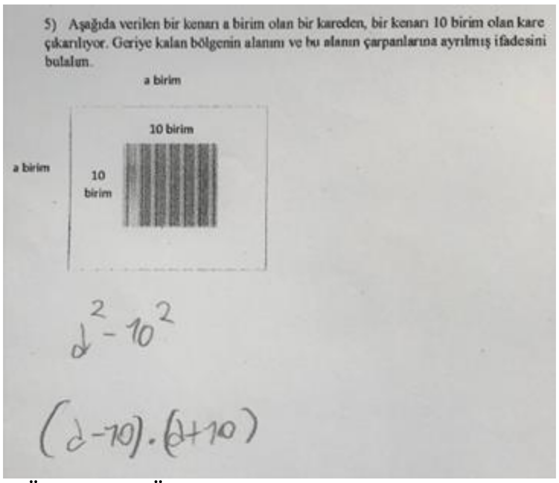
Şekil 18. Ö12 Kodlu Öğrencinin Çalışması

Ö12 gibi diğer öğrencilerde beklenen şekilde, başlangıçta ulaştıkları büyük parçanın alanının, ikinci aşamada oluşturdukları dikdörtgenin alanına eşit olduğunu söyleyebildiler. Bu sırada araştırmacı ile Ö6 arasında gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir.

> Ö: Oluşturduğun dikdörtgenin alanını nasıl bulursun?
> Ö6: Öğretmenim burada kısa kenar (9-3) uzun kenar da (9+3) olacak, ikisini çarparak bulurum.
> Ö: Evet çok doğru, peki elde ettiğimiz alanları incelersek nasıl bir sonuca varırız?
> Ö6: Zaten aynı şekil bunu (dikdörtgeni gösteriyor) keserek oluşturduk ikisi birbirine eşit olur.
> Ö20: Öğretmenim o zaman, 9^2-3^2 ni çarpanlarına ayırmış olduk.
> Ö: Evet aynen öyle.

Böylelikle öğrencilerin iki ifadeyi birbirine eşitleyerek, 9^2-3^2 ifadesini çarpanlarına ayrılmasının kavramsal olarak keşfetmiş olduğu söylenebilir. Tüm öğrenciler iki kare farkı özdeşliğine ve çarpanlarına ayrılmasına yönelik kavramsal anlama yeterliliğine ulaşmışlardır. Açıklama kısmında, öğrencilerin keşfetmiş oldukları a^2-b^2 özdeşliği ve çarpanlarına ayrılması modellenerek anlatılmıştır.

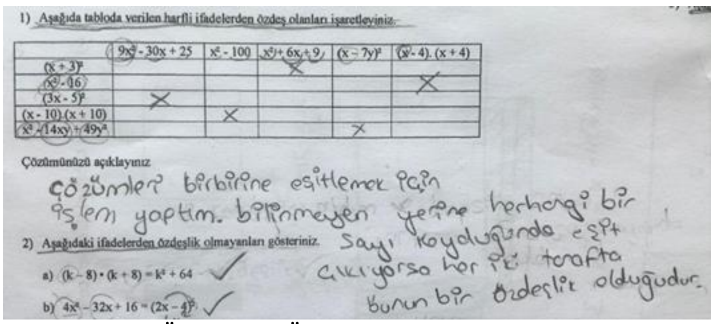
Derinleştirme aşamasında, iki kare farkı özdeşliği ve çarpanlarına ayrılmasının hem kavramsal hem de işlemsel olarak ölçülmesini bir arada barındıran soruya yönelik Ö10 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 19'da verilmiştir.



Şekil 19. Ö10 Kodlu Öğrencinin Derinleştirme Aşasındaki Çözümü

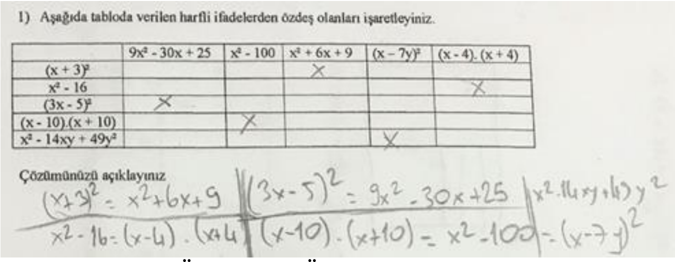
Öğrenciler kalan bölgenin alanını, önce büyük karenin alanından küçük karenin alanını çıkararak yazmışlar, daha sonra ise iki kare farkı özdeşliğinin açılımından yararlanarak yazarak çarpanlarını ifade edebilmişlerdir. Buna göre ders sonunda iki kare farkı özdeşliğine ve çarpanlarına ayrılması konusuna yönelik, tüm öğrenciler kavramsal olarak, kare ve dikdörtgen modellerinin alan bağıntısını kullanarak iki kare farkına özdeş olan ifadeyi belirleyebilmiş, 9^2-3^2 ve x^2-6^2 örneklerinden yararlanarak a^2-b^2 özdeşliğinin genellemesine ulaşabilmiş, farklı problem durumunda, verilen modeli temsil eden özdeşliği ve çarpanlarını belirleyebilmişlerdir. diğer taraftan işlemsel olarak ise iki kare farkı ifadesinin çarpanlarını alan bağıntısından yararlanarak elde etmişler, farklı problem durumunda, verilen cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırabilmişlerdir. Böylelikle ders planının keşfetme ve derinleştirme aşamalarında tüm öğrencilerin a^2-b^2 özdeşliğine yönelik kavramsal ve işlemsel anlamaları zincirleme şeklinde deneyimlemiş olduğu söylenebilir.

Öğretim deneyinin son kısmı olan değerlendirme aşamasının 1. ve 2. sorularında öğrenciler, özdeşlik olan eşitliklere, bilinmeyen yerine farklı sayılar koyarak hangi eşitliklerin her durumda doğrulandığını belirleyerek ulaşmışlar, özdeşlik ile denklem arasındaki farkı hem matematiksel işlemler yaparak hem de dersin sonunda artık tüm özdeşlikleri de tanıdıkları için açılımlarını yaparak ayırt edebilmişlerdir. Özdeş ifadelerin belirlenmesi istenen ilk soruya, Ö14 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 20'de verilmiştir.



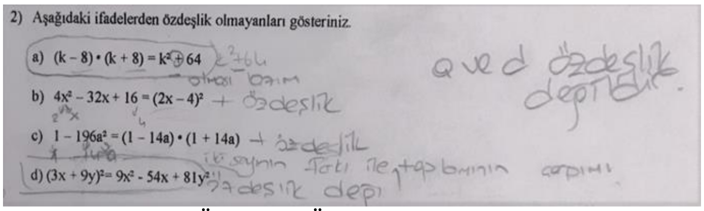
Şekil 20. Ö14 Kodlu Öğrencinin 1. Soruya Yanıtı

Ö14 açıklamasında, bilinmeyen yerine farklı sayılar koyarak her zaman birbirine eşit çıkan cebirsel ifadelerin özdeş olduğunu belirtmiş; buradan Ö14'ün özdeşlik ifadesini kavramsal bilgisini kullanarak açıkladığı görülmektedir. Bazı öğrenciler ise artık özdeşliklerin açılımlarını öğrendikleri için birbirine özdeş olan cebirsel ifadeleri eşleştirebilmişlerdir. Ö11 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 21'de verilmiştir.



Şekil 21. Ö11 Kodlu Öğrencinin 1. Soruya Yanıtı

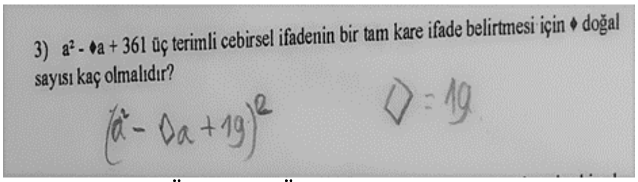
Ö11 gibi bazı öğrenciler ise özdeş olan terimleri, işlemsel bilgilerine dayanarak öğrendikleri özdeşliklerin kurallarından belirlediği görülmüştür. İkinci soruda, özdeşlik ve denklem kavramlarının ayırt edilmesi istenmiştir. Ö7 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 22'de verilmiştir.



Şekil 22. Ö7 Kodlu Öğrencinin 2. Soruya Yanıtı

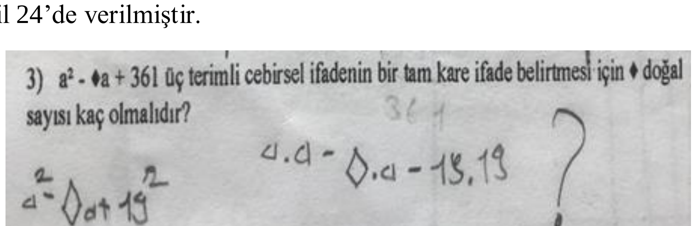
Değerlendirme kağıtları incelendiğinde Ö7 gibi diğer öğrenciler eşitliklerdeki terimlerin katsayılarına ve işaretlerine dikkat ederek, özdeşliklerin kurallarını göz önünde bulundurmuşlar ve özdeşlik olmayan eşitlikleri belirlemişlerdir. Buradan öğrencilerin denklem ile özdeşlik kavramına dair farkı işlemsel bilgilerine dayanarak ayırt ettiği söylenebilir. Bu durum öğrencilerin işlemsel becerileri özdeşlik kavramının algılanmasına ve denklem ile özdeşlik gibi temel yapıların anlamını ve arasındaki farkın görülmesini sağlamıştır. Buna yönelik olarak öğrencilerin işlemsel becerileri de kavramsal öğrenmelerini desteklemiştir.

Diğer bir soruda, iki terimin farkının karesi özdeşliğinin çarpanlarına ayrılmasına yönelik, işlemsel anlamanın ölçüldüğü bir soruya yönelik Ö4 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 23'de verilmiştir.



Şekil 23. Ö4 Kodlu Öğrencinin 3. Soruya Yanıt

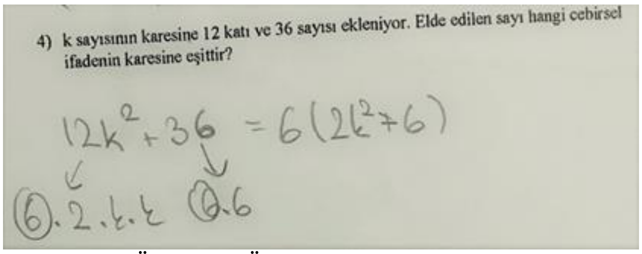
Ö4, 361'in karekökünün 19 olduğunu görmüş; ancak cebirsel ifadenin tamamını kare içine alarak, verilen ifadenin iki terimin farkı özdeşliğinin yapısı olduğunu anlamadığı görülmüştür. Aynı soruya Ö18 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 24'de verilmiştir.



Şekil 24. Ö18 Kodlu Öğrencinin 3. Soruya Yanıtı

Ö18 kodlu öğrenci ise verilen cebirsel ifadeyi iki terimin farkının karesi özdeşliğinin açılımı olduğunu fark edebildiği halde, ortadaki terime ulaşamamıştır. Buradan Ö14 ve Ö18 gibi akademik başarısı düşük olan 4 öğrencinin iki terimin farkı özdeşliğine dair işlemsel anlamalarının yeterli olmadığı belirlenmiştir. Bunun yanında ders başarısı iyi ve orta düzeyde olan öğrenciler soruyu zorlanmadan cevaplayabilmiştir.

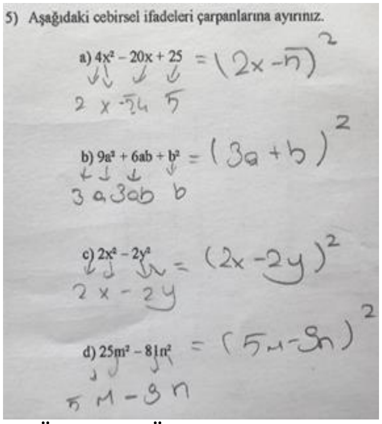
Bir başka soruda, sözel bir şekilde verilen ifadeyi öncelikle cebirsel olarak ifade etmeleri sonra da çarpanlarına ayırmaları istenmiştir. Ö5 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 25'de verilmiştir.



Şekil 25. Ö5 Kodlu Öğrencinin 4. Soruya Yanıtı

Ö5 kodlu öğrencinin yazdığı cebirsel ifadenin hatalı olduğu ve terimlerin ortak çarpanını belirleyemediği görülüyor. Ö5'e değerlendirmeden sonra çözümünü neden bu şekilde yaptığı sorulduğunda, soru kökünden bu şekilde anladığını, o yüzden cebirsel ifadeyi bu şekilde yazdığını söylemiştir. Dolayısıyla bu durumun bilgi eksikliğinden değil, dikkat hatasından kaynaklandığı belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin çoğu verilen sözel ifadeye uygun cebirsel ifadeyi yazarak ve açılımını yaparak, iki terimin toplamının karesi özdeşliğine ulaşabilmişlerdir. Buradan çoğu öğrencide bu özdeşliğe dair kavramsal ve işlemsel anlamanın oluştuğu belirlenmiştir.

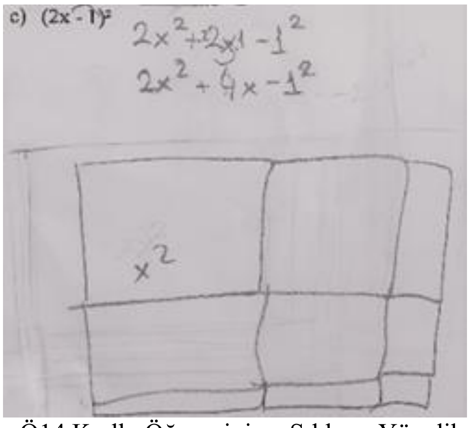
Bunun yanında öğrenciler $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$ biçimindeki ifadelerin çarpanlarına ayrılmasında öğrencilerin işlemsel bilgilerini kullanarak özdeşlikleri doğru bir şekilde yazabilmişlerdir; ancak 5 öğrenci a^2-b^2 biçimindeki ifadelerini çarpanlarına ayıramadıkları görülmüştür. Ö7 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 26'da verilmiştir.



Şekil 26. Ö7 Kodlu Öğrencinin 5. Soruya Yanıtı

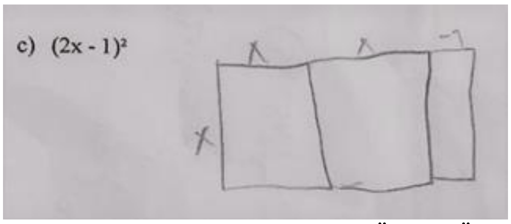
Ö7, c ve d şıklarındaki ifadelerin terimlerin kareköklerini belirlemiş; ancak ifadeleri genelleyerek, tam kare özdeşliği olarak algılamış ve eşitlikleri hatalı yazmıştır. Değerlendirme kağıtları incelendiğinde öğrencilerin c ve d şıklarında zorlandıkları belirlenmiştir. Ö13 kodlu öğrenci ise c şıkkında, terimleri 2 ile ortak çarpan parantezine almadan çarpanlarına ayırmıştır. Bu zorluk, iki kare farkı özdeşliğinin derinleştirme aşamasında, öğrencilerin işlemsel bilgilerini kullanacakları farklı cebirsel ifadeler üzerine değinilmediğinden kaynaklanmış olabilir. Bu bağlamda bu öğrencilerde iki kare farkı özdeşliğinin çarpanlara ayrılmasının işlemsel bilgilerinin eksik kaldığı belirlenmiştir.

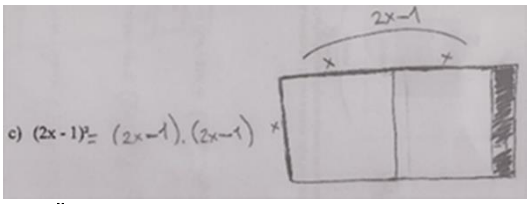
Özdeşliklerin modellerle açıklanması istenen son soruda öğrenciler, iki terimin toplamını karesi ve iki kare farkı özdeşliğini kolaylıkla modellerken, iki terimin farkının karesi özdeşliğini modellerken zorlandıkları görülmüştür. Ders başarısı orta düzeyde olan Ö14 kodlu öğrencinin çözümü Şekil 27'de verilmiştir.



Şekil 27. Ö14 Kodlu Öğrencinin c Şıkkına Yönelik Çözümü

Şekil 27'de, Ö14 önce özdeşliğin açılımını yapmaya çalışmış; ancak terimlerin işaretlerinde hata yapmıştır. Yaptığı modellemede negatif karoları göstermemiş ve kenar uzunluğu (2x+1) olan bir kare modellemiştir. Burada öğrencinin işlemsel hatası, yanlış modelleme yapmasına yol açmış, ayrıca kavramsal anlamasında da eksikliklerin olduğu görülmüştür. Diğer taraftan birkaç öğrenci ise, negatif cebir karolarını kullanamamışlar ve modellemelerini tamamlayamamışlardır. Ö11 ve Ö9 kodlu öğrencilerin çözümleri sırasıyla Şekil 28'de verilmiştir.





Şekil 28. Ö11 ve Ö9 Kodlu Öğrencinin Çözümü

Ö11 ve Ö9 gibi 5 öğrenci, verilen cebirsel ifadenin bir kenar uzunluğu (2x-1) olan bir kare modellemeye çalışmışlar; ancak modellemelerini tamamlayamamışlardır. Değerlendirme aşamasından sonra Ö11 ve Ö9'a modelleme yaparken nasıl bir yol izledikleri sorulduğunda, kare oluşturmaya çalıştıklarını, ama diğer kenar uzunluğunun nasıl olması gerektiğini bulamadıklarını belirtmişlerdir. Dolayısıyla bu öğrencilerin $(a-b)^2$ özdeşliğinin kavramsal anlamalarında; aynı zamanda özdeşliğin açılımını da yazamadıklarından işlemsel bilgilerinde de eksiklikler olduğu görülmüştür. Öğretim deneyinin son aşaması olan değerlendirme sorularından elde edilen verilerden yararlanarak öğrencilerin özdeşliklerin modellenmesinde ve çarpanlarına ayrılmasına yönelik kavramsal ve işlemsel anlamalarının oluşma durumları Tablo 3'de verilmiştir.

Tablo 3. Öğrencilerin Özdeşlikler ve Çarpanlara Ayırma Konusuna Yönelik Kavramsal ve İşlemsel Anlama Durumları

Bilgi Türü	Kazanımlar	Soru No	Öğrenci Kodları
Kavramsal Anlama	Özdeşlik kavramını tanır.	1	Tümü
	Özdeşlik ile denklem kavramları arasındaki farkı açıklar.	2	Tümü
	Sözel ifadeye uygun cebirsel ifade yazarak tam kare özdeşliğine ulaşır.	4	Ö5 hariç
	3x.(x-2) ve benzer ifadeleri cebir karolarını kullanarak modeller.	6-a	Tümü
	$(x+3)^2$ ve benzer ifadeleri cebir karolarını kullanarak modeller.	6-b	Ö16 hariç tümü
	$(2x-1)^2$ ifadesinin cebir karolarını kullanarak modeller.	6-c	Ö4, Ö8, Ö11, Ö14, Ö18 hariç tümü
İşlemsel Anlama	$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ve a^2-b^2 özdeşliklerinin kurallarını kullanarak açılımını yazar.	1	Tümü
	İkinci dereceden üç terimli cebirsel ifadelerin çarpanlarına, $(a+b)^2$ ve $(a-b)^2$ özdeşliklerinin kurallarını kullanarak ulaşır.	5-a,b	Tümü
	Sözel ifadeye uygun cebirsel ifadeyi yazarak çarpanlarına ayırır.	4	Ö5 hariç
	3x.(x-2) ifadesinde dağılma özelliğini uygulayarak terimleri çarpar.	6-a	Tümü
	$(x+3)^2$ ifadesinin açılımını özdeşlik kuralından yazar.	6-b	Ö16 hariç tümü
	$(2x-1)^2$ ifadesinin açılımını özdeşlik kuralından yazar.	6-c	Ö9, Ö11, Ö14 hariç tümü
	İki terimin farkının karesi özdeşliğinin tanıyarak verilmeyen terimini bulur.	3	Ö4, Ö8, Ö11, Ö18 hariç tümü
	İki kare farkı özdeşliğinin kuralını farklı cebirsel ifadeler için uygular.	5-c,d	Ö7, Ö8, Ö13, Ö18 hariç tümü

Tablo 3'de görüldüğü gibi sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik kavramsal ve işlemsel anlama sürecinde, iki terimin toplamının karesi özdeşliğinde tüm öğrenciler modellemeleri cebir karolarını kullanarak daha rahat çizebilmişler ve zorlanmadan çarpanlarına ulaşmışlardır. İki terimin toplamının karesi özdeşliğinde tüm terimler pozitif olduğu için öğrenciler hem kavramsal hem de işlemsel anlamanın tam olarak gerçekleştiği görülmüştür. Bunun yanında ders başarısı düşük ve orta düzeyde olan Ö4, Ö8, Ö11, Ö14, Ö18 kodlu öğrenciler iki terimin farkının karesi özdeşliğinin modellenmesinde Ö4, Ö8, Ö11, Ö18, kodlu öğrenciler iki terimin farkı özdeşliğini ve Ö8, Ö18, Ö7 ve Ö13 kodlu öğrenciler ise iki kare farkı özdeşliğini işlemsel olarak tanımada zorlandıkları görülmüştür.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusuna yönelik kavramsal ve işlemsel anlama süreçleri, 5E öğretim modeline dayalı bir öğretim deneyi aracılığıyla incelenmiştir. Bu bağlamda araştırmada ‘‘Öğrenciler, özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunda kavramsal ve işlemsel anlamayı gerçekleştirmek için ön bilgiye sahip midir?’’ ve ‘‘Özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun 5E öğretim modeli ile öğretiminde öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama süreçleri nasıldır?’’ sorularının incelendiği iki aşamada sonuçlar ele alınmıştır.

İlk aşama kapsamında özdeşlikler ve çarpanlara ayırma ön şart kazanımlarında öğrencilerin ön bilgileri incelenmiştir. Buna göre, öğrencilerin matematik öğretim programında belirtilen özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunda kavramsal ve işlemsel anlamayı gerçekleştirmek için ön bilgi olarak ‘‘Basit cebirsel ifadeleri anlar’’ ve ‘‘Cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazar’’ kazanımlarında; verilen sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeleri ve cebirsel ifadelere uygun sözel ifadeleri rahatlıkla yazabildiği, öğrencilerin değişken (bilinmeyen) kavramını da hatırladıkları, terimler arasında dört işlem yaparak, cebirsel ifadeleri düzenleyebildikleri görülmüştür; ancak öğrencilerin tümü sabit terimin de bir katsayı olduğunu unuttukları görülmüştür. Bunun yanında bazı öğrencilerin terimleri belirlerken terimlerin önündeki ‘–’ veya ‘+’ işaretlerini göz ardı ettikleri gözlenmiştir. Benzer olarak Gürsoy (2019) cebir öğrenimi üzerine yaptığı araştırmasında, öğrencilerin cebirsel ifadelerin terimlerini ve katsayılarını belirlerken zorlandıklarını, terimleri ve katsayıları belirlerken işaretleri dikkate almadıklarını gözlemlemiştir. Öğrencilerin bu güçlüklerini gidermek için ders sırasında sürekli değişken, terim, katsayı ve sabit terime ait tanımları tekrar etmekten başka bir çözüm yolu bulamadığını belirtmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin matematiksel sembolleri kullanırken zorluk yaşadıkları ve matematik derslerinde sembolik ifadelerin kavramsal olarak anlaşılmasının üzerinde durulması önerilebilir. ‘‘Cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazar’’ kazanımının derinleştirme ve bu iki kazanımın değerlendirme aşamalarında öğrenciler verilen çalışma kağıdında terim katsayı, sabit terim kavramlarını farklı sorularda da gösterebildikleri, terimlerin işaretlerini de unutmadıkları ve harfli terimler arasında aritmetik işlemler yaparak cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazabildikleri görülmüştür. Buna paralel olarak Gürsoy (2019), cebirsel ifadeler konusuna giriş yapmadan önce öğrencilerin sahip olması gereken tam sayılarla işlemler konusu ile ilgili ön bilgilerin hatırlatılması cebirsel ifadelerde işlemler yaparken öğrencilere kolaylık sağlayacağını ifade etmiştir. Bu bağlamda konulara giriş yapmadan önce öğrencilerin ön bilgilerini tazeleyen ve eksikliklerini gideren çalışmalar, öğrencilerin işlenecek konuyu kavramsal ve işlemsel olarak kavramalarını sağlamlaştıracağı için öğretmenlere önerilmektedir.

Diğer bir ön şart kazanımı olan ‘‘Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar’’ kazanımında, öğrencilerin çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğini modellemeler üzerinden kavramsal olarak anlamlandırabildiği gözlenmiştir. Ders planında yer alan cebir karoları ile modelleme etkinliği ile aynı zamanda öğrenciler, çarpanlar ve katlar konusunda öğrenmiş oldukları bilgilerini kullanarak, çarpan kavramını da kavramsal olarak anladıkları gözlenmiştir. Sarı (2012), kavramsal yapıda verilen üstbiliş destekli gerçekleşen bir öğretimden sonra öğrenciler, işlemsel bilgi ölçeğindeki soruları çözerken, üstbiliş becerisi ile benzer soruların çözümünü düşünmüş, işlem hatalarını düzeltmiş olabileceklerini; cebir derslerinin kavramsal anlamayı destekleyerek işlenmesinin, işlemsel bilginin anlaşılmasında ve kullanılmasında başarıyı arttırabileceğini belirtmiştir. Bu bağlamda, yapılan etkinliklerin veya sorulan soruların daha çok bilgi ağırlıklı değil, kavrama ve uygulamaya dayalı olması, konuların kavramsal olarak öğrenilmesinde daha etkili olduğu gözlenmiş ve öğretmenlere derslerinde kavramsal anlamayı destekleyecek nitelikteki etkinliklere yer vermeleri önerilmektedir.

Negatif terimlerin olduğu (x-2).(x+3) biçimindeki cebirsel ifadelerinde, oluşturdukları modelleme ile yaptıkları çarpma işleminin sonuçlarını yorumlayamayan öğrenciler olmuştur. Bu öğrencilerin cebirsel ifadeleri çarpmada işlemsel bilgilerinin tamamlanmış olduğu; ancak elde ettiği sonuçları oluşturdukları modellemeler ile bağdaştıramadıkları, dolayısıyla öğrencilerin kavramsal anlamada eksiklikleri olduğu belirlenmiştir. Benzer durum Birgin ve Gürbüz’ün (2009) yaptıkları çalışmada, ortaokul öğrencilerinin işlemsel bilgiyi ölçen problemlerde, kavramsal bilgiyi ölçen problemlere göre daha iyi bir başarı gösterdiğini tespit etmişlerdir. Bunun yanında Yazır (2015), modelleme yöntemine dayalı olarak yaptığı çalışmada modelleme etkinliklerinin kavramsal ve işlemsel bilgiyi geliştirdiği sonucuna ulaşmıştır. Bu durumda kavramsal anlamanın sağlanması gereken kazanımları işlerken, ders içi etkinliklerde modelleme çalışmalarına, görsellerden yararlanmaya ya da materyal kullanmaya daha fazla yer verilmesi önerilmektedir.

‘‘Ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır’’ kazanımında öğrenciler cebir karolarını kullanarak ‘3x+6’ ve ‘x^2+3x’ ifadelerini dikdörtgenler oluşturarak modellemiş ve cebirsel ifadeleri, dikdörtgenin iki kenarının çarpımı şeklinde yazabilmiş, cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmanın modellemeler üzerinden nasıl yorumlanacağını kavramsal olarak anlamış oldukları belirlenmiştir. Bunun yanında, işlemsel anlamanın desteklenmesi amacıyla aynı cebirsel ifadeyi çarpanlara ayırırken, doğal sayılardan örnek verilmiş ve bu sayıların ortak bölenlerine dikkat çekilmiş, dolayısıyla öğrenciler cebirsel ifadelerin çarpanlara ayrılmasını keşfetmişlerdir. Benzer olarak, Baykul’da (2014), daha önce işlenen çarpanlar ve katlar konusunun öğretimi sırasında, çarpan kavramı üzerinde durulmuş olduğundan, cebirsel ifadelerin çarpanlara ayrılması konusu önce, doğal sayıların üzerinden ilgili alıştırmalarla başlanarak, çarpan ve çarpanlara ayırma kavramlarının hatırlatılması gerektiğini belirtmiştir. Bu bağlamda, anlamlı bir öğrenme sağlamak adına öğrencilerin matematik konuları arasında ilişki kurarak kavramsal ve işlemsel anlamının desteklendiği uygulamaların derslerde yoğunlaştırılması matematik öğretmenlerine tavsiye edilebilir.

Cebirsel ifadelerin çarpımını yapar ve ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırır kazanımlarının ortak olarak değerlendirildiği aşamada, kavramsal ve işlemsel anlamayı ölçen nitelikte sorular bir arada verilmiştir. Öğrencilerin modellemeleri istenen şekilde yaptıkları, verilen modellemeleri yorumlayabildikleri ve farklı modeller üzerinde işlem becerilerini de kullanarak sorulara doğru yanıt verdiği görülmüştür. Rittle-Johnson ve Koedinger (2009), yaptıkları çalışmada, derslerin kavramsal ve işlemsel öğrenme ile tekrarlanan bir şekilde işlenmesi, işlemsel becerilerin öğrenilmesini kolaylaştırdığını, kavramsal öğrenmeyi ise desteklediği sonucu ile benzeşmektedir.

İkinci aşamada asıl amaç olan özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun öğreniminde öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlama süreçleri incelenmiştir. Bu kapsamda Ders planı-3'ten elde edilen bulgulara göre; özdeşlik kavramının kazanımında, öğrenciler harfli ifadelerin yerine farklı değerler vererek eşitliği sağlanan cebirsel ifadeleri bulabilmiş, verdikleri cevaplar ile özdeşlik kavramı ve denklem özdeşlik arasındaki farkı kavramsal olarak keşfetmişlerdir. Böylelikle işlemsel bilgilerin, kavramsal bilgilerinin oluşturulmasına destek olduğu gözlenmiştir. Bu sonuç, Baki ve Kartal'ın (2004), matematiksel kavramların öğretiminde bu kavramların ilişkilerine öncelik verildiğinde, öğrencilerin matematiği öğrenmeleri daha etkili ve kalıcı olacaktır sonucu ile paralellik göstermektedir. Bunun yanında soru-cevap yöntemi ile tüm öğrencilerin etkinliğe katılımı sağlanmış, denklem ve özdeşlik kavramını ayırt etmeleri için düşünmeye teşvik edilmiştir. Bu şekilde öğrenciler ilk defa gördükleri bu kavrama ilişkin farkındalık kazanmış oldular. Bu bağlamda derslerin farklı yöntemlerinin ile desteklenmesi, öğrencileri öz açıklamalarını yapmalarına için teşvik edilmesi ve öğretime geçmeden öğrencilerin dikkatlerini çekici uygulamalar yapılması konunun etkili öğretimi için önerilmektedir.

İki terimin toplamının ve farkının karesi, iki kare farkı özdeşlikleri ve çarpanlarına ayrılması konusunda öğrenciler, 5E öğrenme planının ayrı aşamalarında, cebir karolarını kullanarak özdeşlikleri geometrik şekiller ve bağıntılarla harmanlayarak ve sayılar üzerinden kurulan bağıntıları harfli ifadelere genelleyerek özdeşliklerin açılımına ulaşabilmişlerdir. Böylece konuya dair bilgiyi hem kavramsal hem de işlemsel olarak inşa etmeyi deneyimlemişlerdir. Benzer olarak Akın ve Pesen (2010), özdeşlik konusunun öğretiminde kullanılan somut materyallerin öğrencilerin aktif bir öğrenme gerçekleştirmeleri ve bilgilerinin daha kalıcı olmasında etkili olduğunu belirtmişlerdir. Benzer olarak, Çaylan (2018), yaptığı çalışmada cebirsel kavramların öğretiminde buluş yoluyla öğrenme ve yöntemlerinin kullanımının, ortaokulda öğrenmeyi olumlu etkilediğini belirtmiştir. Bu bağlamda öğretmenler özdeşliklerin öğretiminde, cebir karoları gibi öğrencilerin kendilerinin oluşturabildiği somut materyallerden yararlanılarak, kavramsal öğrenmeye katkı sağlayacak modellemeler yaparak farklı öğretim yöntemleri geliştirilebilir.

Cebir öğrenme alanı içinde geniş bir yer tutan geometrik şekillerin ve bağıntıların, öğrencilerin kavramsal anlamalarına, işlem kolaylığına ve formülün öğrenilmesine katkı sağlayacağından öğretmenlere cebir derslerinde kullanılması önerilmektedir. Bununla birlikte öğrenciler iki kare farkı ve $a^2 \pm 2ab + b^2$ biçimindeki tam kare ifadeleri matematiksel işlemler yaparak, formül ve kuralları kullanarak çarpanlarına ayırabilmişler, böylece işlemsel anlamayı da oluşturabilmişlerdir. Bunun yanında Baki ve Kartal (2004), Rittle- Johnson ve Alibali (1999), kavramsal ve işlemsel bilginin kazanılmasında, kavramsal bilgideki gelişiminin işlemsel bilginin oluşmasını kolaylaştırdığını ifade etmişlerdir. Dolayısıyla matematik öğretmenlerine, kazanımın kavramsal ve işlemsel boyutunu, bir arada dengeli ve birbirini destekleyecek nitelikte anlatılmasının kazanımın kalıcılığını sağlayacağı açısından önerilmektedir. Ayrıca özdeşliklerin açılımları ve özdeşliklerin çarpanlara ayrılması doğrudan kurallar ve formüller verilerek ezberletilmek yerine bunları elde etme yolları gösterilerek, öğrencilerin keşfetmeleri sağlanması matematik öğretmenlerine önerilmektedir.

$(2a + 3)^2$ ifadesinde terimlerin karelerini alırken birkaç öğrencinin katsayılarını göz ardı ettikleri; ancak ufak hatırlatmalarla öğrencilerin hatalarını kendileri bularak düzelttiği gözlenmiş, daha sonra üç terimli cebirsel ifadelerin çarpanlarına ayrılması istenen soruda çoğu öğrenci bu aşamada terimlerin katsayılarına dikkat ederek ve işlemsel bilgilerini doğru bir şekilde kullanarak cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırabilmişlerdir. Bu durum Şahiner'in (2018), 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadelerin parantez içeren sorularında hatalar yaparak; aritmetik işlemlerdeki kuralları cebirsel ifadelere uygulamada zorluk yaşadıkları sonucuyla benzerlik göstermektedir (s. 75).

Ders başarısı düşük öğrencilerin, x^2-4x+4 cebirsel ifadesinin modellenmesinde cebir karolarını kullanırken, karenin kenarlarının çarpımının, kareyi oluşturan parçaların alanlarını vermesi gerektiğini göz ardı etmişlerdir. Burada iki terimin farkının karesi özdeşliğinin modellenerek oluşturulmasında, kavramsal anlamanın eksik kaldığı görülmüştür. Benzer olarak Soylu ve Soylu (2006), öğrencilerin hem işlemsel hem de kavramsal bilgilerinin bir arada kullanılmasını gerektiren kavramları öğrenirken zorluk yaşadıklarını belirlemişlerdir. Bu eksikliğin giderilmesine yönelik olarak x^2-6x+9 cebirsel ifadesinin modellenmesi istenmiş ve öğrencilerin önceki soruda düştükleri hatayı, yapılan açıklamalar ve hatırlatılmalardan sonra bu soruda yapmadıkları, doğru cebir karolarını kullanarak doğru bir kare modellemesine ulaştıkları ve oluşturdukları karenin kenarlarını belirleyerek de verilen cebirsel ifadenin çarpanlarına ulaştıkları görülmüştür. Bu sonuç, Özer ve Şan'ın (2013), özdeşlikler konusunun öğretilmesinde görsel materyaller ile desteklenen etkinliklerin, öğrencilerin başarılarını yaklaşık yüzde altmış oranında arttığını belirlemeleri ile desteklenmektedir. Diğer taraftan Rittle-Johnson ve Koedinger (2009), modelleme eğitiminde kavramsal ve işlemsel anlamayı yinelemeli bir süreç izlenmesi, öğrencilerin kavramların ve işlemlerin öğrenilmesini kolaylaştıracağını da belirtmişlerdir. Bu bağlamda matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel bilgilerin bir arada olduğu pekiştirme etkinliklerinin çoğaltılması ve derslerin bu doğrultuda iki bilgi türü açısından dengeli bir şekilde işlenmesi önerilmektedir.

5E öğretim modelinin son aşamasında özdeşlikler ve çarpanlarına ayırma konusunun tamamını içeren değerlendirme aşamasında, öğrenciler kavramsal olarak özdeşlik ve denklem kavramlarını ayırt edebildikleri, özdeşliğin ne olduğu, denklem ile arasındaki farkı özdeşlik ve denklemdeki değişkenlerin neyi ifade ettiklerini açıklayabilmişler, cebirsel ifadelerden özdeşlik olanların açılımlarını işlemsel bilgilerini kullanarak yapabilmişler ve özdeşlik olmayan eşitlikleri belirlemişlerdir. Bu bağlamda matematik derslerinde bir konunun öğretiminde sadece kavramın tanımına ve ne olduğuna değil, bu kavram ile bağlantılı kavramlar arasındaki ilişkilere öncelik verilerek işlenmesi, öğrencilerin matematiksel kavramları daha etkili ve kalıcı olduğu sonucuna varılmıştır, matematik öğretmenlerine de derslerini yürütürken kavramlar arası ilişkilere odaklanmaları önerilmektedir.

a^2-♦a+361 cebirsel ifadesindeki verilmeyen katsayıdan dolayı iki terimin farkının karesi özdeşliği ve çarpanlara ayrılması konusunda işlemsel anlamanın ders başarısı düşük olan öğrencilerde tam gerçekleşmediği gözlenmiştir. Bu durumun nedeni olarak, öğrencilerin özdeşliklerin açılımlarını ve çarpanlara ayırma yöntemlerini hatırlayamadıkları veya bilgilerini verilen farklı bir soruda nasıl uygulayacağını kavrayamamış olduğu söylenebilir. Bu durum, Şahiner (2018) çalışmasında, öğrencilerin özdeşlikler konusunda özellikle dört işlemde hata yaptıkları veya istenen cebirsel özdeşliği kullanamadıkları sonucu ile paralellik göstermektedir. Aynı zamanda Çelik ve Güneş'in (2013), 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin birçoğunun harfli sembollerin bir sayı, bilinmeyen ve değişken olduğunu kullanmada zorluk yaşadığı sonucu ile desteklenmektedir. Bu bağlamda matematik öğretmenleri özdeşlikler ve çarpanlara ayırma konusunun işlendiği derslerde, öğrencilerin farklı yapıdaki problem durumları ile karşılaşmalarına olanak sağlamaları ve öğrencilere bilgilerini değişik durumlarda da kullanabilmeleri fırsatı sunmaları önerilmektedir.

Hem kavramsal hem de işlemsel anlamanın bir arada sorgulandığı bir soruda Ö5 kodlu öğrenci verilen sözel ifade için farklı bir cebirsel ifade yazmış; bu ifadenin çarpanlarına ayıramamıştır. Birgin ve Gürbüz'ün (2009), ortaokul öğrencilerinin işlemsel bilgiyi ölçen problemlerde daha iyi bir başarı gösterdiğini belirledikleri çalışmayla benzeşmektedir. Bunun yanında verilen cebirsel ifadeleri işlemsel bilgilerini kullanarak çarpanlara ayrılmasının istendiği soruda Ö7, Ö8, Ö13, Ö18 kodlu öğrenciler, iki kare farkı özdeşliğinin kuralını farklı sorularda yapamamasının nedeni, işlemsel bilgilerinin pekiştirilmesine yönelik çalışmaların yapılmadığından olabileceği düşünülmektedir. Buna yönelik olarak, matematik öğretmenlerinin öğrencilerinin cebirsel düşünme ve akıl yürütmelerine fırsat sunmak için en etkili yolları belirlemeleri gerektiği düşünülmekte ve derslerde cebirsel muhakeme yapabilmeyi gerektiren farklı tarzda sorulara ağırlık verilmesi önerilmektedir. Değerlendirme aşamasının son sorusunda, kavramsal anlamaya yönelik verilen cebirsel ifadelerin modellemesini cebir karolarını kullanarak çizmeleri istenmiş, ders başarısı yüksek ve orta düzeyde olan Ö2 ve Ö5 kodlu öğrenciler önce işlemsel bilgilerini kullandığı, kavramsal bilgilerini ikinci planda kullanmışlar; dolayısıyla işlemsel anlamanın, kavramsal öğrenmenin önünde olduğu sonucuna varılmıştır. Sarı (2012), çalışmasında cebirsel ifadeler ve denklemler konusunda 7. sınıf öğrencilerinin kavramsal ve işlemsel bilgi gelişiminde, üstbiliş stratejileri ile yürütülen öğretim sonunda öğrencilerin işlemsel bilgi puanları, kavramsal bilgi puanlarına kıyasla anlamlı düzeyde yüksek çıktığı sonucu ile paralellik göstermektedir. Benzer olarak, Baki ve Kartal (2004), yaptıkları araştırmada, birçok öğrencinin cebirsel bilgilerinin oluşmasında, kavramsal bilgiden ziyade işlemsel bilginin ön planda olduğu bir matematiksel öğrenmenin gerçekleştiği sonucuna varmışlardır. Bu duruma yönelik olarak, öğrencilerin kavramsal anlamalarını da, işlemsel başarı seviyesine ulaştırabilmek adına, kavramsal öğretim için öğretmenlere rehber olabilecek kaynakların arttırılması önerilmektedir.

$(2x-1)^2$ özdeşliğinin modellenmesinde matematik başarısı orta ve düşük olan bazı öğrenciler geometrik bilgilerini özdeşlikler konusu ile ilişkilendiremediklerini, muhakeme yapma becerilerinin zayıf olduğunu ve işlemsel bilgilerinin kavramsal anlamalarının önünde olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde Ulaş (2015) yaptığı çalışmada, ders başarısı düşük olan öğrencilerin dikdörtgenin alanını kullanarak cebirsel ifadelerle işlem yapma konusunda eksiklikleri olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu duruma benzer olarak Dündar (2012), özdeşlikleri modellerle açıklayabilme kazanımında, öğrencilerin geometrik şekiller üzerinde cebir ile geometri bilgilerini arasında ilişkilendirme yapmada zorluklar yaşadığını, öğrencilerin özdeşliklerin açılımına ulaşırken oluşturdukları şeklin kenar uzunluğu ile alanı arasındaki ilişkinin kurulamamasının nedeni olarak öncelikle alan korunumunun anlaşılmadığını tespit etmiştir. Bu bağlamda çıkarma işlemi içeren özdeşliklere yönelik modelleme yapmadan önce, öğrencilere bu özdeşliklerin yapısını cebirsel olarak anlatmak, daha sonra geometri ile ilişkisinin kurulmasını sağlayarak modellenmesi daha uygun bir yöntem olabilir. Buradan bu öğrencilerin sorudaki verilen cebirsel ifade ile modellemeyi ilişkilendiremediği, yaptıkları çözümlerden geçmişteki deneyimlerini yeni durumlara uygulayamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda öğretmenlerin kendi öğrencilerinin öğrenme biçimlerini ve ihtiyaçlarını iyi tanıyarak, öğrencilerin kendi öğrenmelerinde daha aktif olduğu, kendi çözümlerini değerlendiren, sorgulayan, yorumlayan, öğrenme ortamlarının sağlanması önerilmektedir, bu şekilde kavramsal ve işlemsel anlamanın bir arada ve birbirini destekleyici şekilde oluşmasını sağlayacağı düşünülmektedir.

Kaynaklar / References

Akın, M. F. & Pesen, C. (2010). Özdeşliklerin elde edilmesinde tam küp modelinin öğrenme ürünlerine etkileri. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*, 86-102.

Altun, M. (2010). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi* (7th ed.). Bursa: Alfa Aktüel.

Baki, A. & Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karekterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *2*(1), 27–46.

Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim.

Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. sınıflar)*. Ankara: Pegem Akademi.

Bekdemir, M., Okur, G. & Gelen, S. (2010). 2005 ilköğretim matematik programının ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kavramsal, işlemsel bilgi ve becerilerine etkisi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(2), 130-148.

Birgin, O. & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *22*(2), 529-550.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Çaylan, B. (2018). *Cebir karosu kullanımının altıncı sınıf öğrencilerinin cebir başarısı, cebirsel düşünmeleri ve cebir karosu kullanımına ilişkin görüşleri üzerindeki etkileri* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (509436)

Çelik, D. & Güneş, G. (2013). Farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlama seviyeleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, *13*(2), 1168-1186.

Delice, A. & Sevimli, E. (2010). Matematik öğretmeni adaylarının belirli integral konusunda kullanılan temsiller ile işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *9*(3), 581-605.

Demir, Ö. (2018). *5E öğrenme modeli ile 7. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi başarı ve Van Hiele dönüşüm geometrisi düşünme düzeylerinin gelişimi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (508292)

Dündar, K. T. (2012). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinde özdeşlikleri modelleme becerilerinin incelenmesi: Origami ile modellenmesi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (308760)

Erdem, Ö. & Aktaş, G. S. (2018). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanılgılarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(2), 312-338.

Gürsoy, P. (2019). *Bir matematik öğretmeninin cebir öğretim sürecinden yansımalar: fark etme becerisi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (550288)

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Karaaslan, K. G. & Ay, Z. S. (2017). Öğretmen adaylarının olasılık konusuna ilişkin alan bilgilerinin kavramsal-işlemsel bilgi kapsamında incelenmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *17*(2), 716-736.

Kaymakçı, Z. (2015). *5E öğrenme modeline göre hazırlanan etkinliklerin ortaokul 2.sınıf öğrencilerinin matematik dersi cebir öğrenme alanındaki akademik başarılarına etkisi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (378309)

Koç, G. (2002). *Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının duyuşsal ve bilişsel öğrenme ürünlerine etkisi* (Unpublished doctoral dissertation). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (113407)

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11– 15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

Republic of Turkey Ministry of National Education. (2009). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.

Republic of Turkey Ministry of National Education. (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.

Republic of Turkey Ministry of National Education. (2018). *Matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.

Orhan, N. (2013). *An investigation of private middle school students? common errors in the domain of area and perimeter and the relationship between their geometry self-efficacy beliefs and basic procedural and conceptual knowledge of area and perimeter* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (345125)

Örmeci, Ş. (2012). *7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda kavramsal ve işlemsel anlayışları* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (319549)

Övez, F. T. D. & Çınar, B. A. (2018). Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin cebir bilgileri ve cebirsel düşünme düzeylerinin problem kurma becerileri açısından incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20*(1), 483-502. doi:10.25092/baunfbed.418622

Özer, M. N. & Şan, İ. (2013). Görselleştirmenin özdeşlik konusu erişisine etkisi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(1), 1275-1294.

Özyıldırım G. F. ve Umay, A. (2018). Problem çözümüne kavramsal/işlemsel yaklaşım ölçeğinin geliştirilmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *18*(1), 375-391.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). East Sussex, UK: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*, *91*(1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346-362. doi: 10.1037//0022-0663.93.2.346

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *The British Journal of Educational Psychology*, *79*(3), 483–500. doi:10.1348/000709908X398106

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, UK: Oxford University Press.

Sarı, S. (2012). *7. sınıf cebirsel ifadeler ve denklemler konusunun üstbilişin desteklendiği bir yöntemle öğretiminin kavramsal ve işlemsel öğrenmeye etkisi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (314918)

Soylu, Y. & Soylu, C. (2006). Matematik derslerinde başarıya giden yolda problem çözmenin rolü. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *7*(11), 97-111.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Şahiner, F. (2018). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin matematik dersi cebirsel ifadeler konusundaki kavram yanılgıları* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (512922)

Şentürk, C. (2010). Yapılandırmacı yaklaşım ve 5E öğrenme döngüsü modeli. *Eğitime Bakış Dergisi*, *6*(17), 58-62.

Şimşek, B. (2018). *Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler konusunda yaptıkları hatalar ve hataların nedenlerinin incelenmesi* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (497271)

Taştepe, M. (2018). *İşlemsel ve kavramsal bilginin gelişiminin cebirsel kesirleri içeren denklemler bağlamında incelenmesi* (Unpublished doctoral dissertation). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (515645)

Türnüklü, A. (2000). Eğitimbilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilecek nitel bir araştırma tekniği: Görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi Dergisi*, *6*(4), 543-559.

Ulaş, T. (2015). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (423567)

Ulaş, T. & Yenilmez, K. (2017). Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi. *International e-Journal of Educational Studies (IEJES)*. *1*(2), 103-117.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Yazır, F. (2015). *Modelleme temelli yapılan öğretimin 9. sınıf fonksiyonlar konusunda kavramsal ve işlemsel bilgiye etkisi.* (Unpublished master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (414437)

Yıldırım, K. (2016). *Denklemler konusunun etkinliklerle öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerine ve matematik kaygılarına etkisi* (Master's thesis). Retrieved from the Thesis Center of Council of Higher Education of Turkey. (430754)

Yıldız, P., Çiftçi, Ş. K., Şengil-Akar, Ş. & Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *The Journal of Educational Research*, *1*(1), 18-31.