Türkiye'de Okutulan Ortaokul Matematik Ders Kitaplarının Aritmetik Ortalama Kavramına İlişkin Öğrencilere Sunduğu Öğrenme Fırsatları

Suphi Önder Bütüner

Yozgat Bozok Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Yozgat/Türkiye (ORCID: 0000-0001-7083-6549)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 1 Ekim 2019; Yayına kabul tarihi: 10 Nisan 2020; Çevrimiçi yayın tarihi: 27 Nisan 2020

Öz: Bu çalışmada veri işleme öğrenme alanının önemli kavramlarından biri olan aritmetik ortalama kavramının Türkiye'de okutulan ortaokul matematik ders kitaplarında nasıl sunulduğu, aritmetik ortalama ile ilgili ne tip problemlere yer verildiği, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğu, problemlerin çözümlerinde hangi temsil biçimleri ve çözüm stratejilerinin kullanıldığı incelenmiştir. Çalışma kapsamında incelenen kitaplar 2019-2020 eğitim öğretim yılında kullanılan ders kitaplarıdır. Çalışmanın araştırma sorularını cevaplandırmak için iki boyutlu bir çerçeve (yatay ve dikey analiz) kullanılmıştır. Analizler iki araştırmacı tarafından yapılmıştır. Denge ve adil-paylaşım modelleri aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasında güçlü birer analoji olarak kabul edilmesine karşın, her iki altıncı sınıf ders kitabında bu modellerin ya yeterli ölçüde ya da hiç kullanılmadığı tespit edilmiştir. Buna ek olarak, ders kitaplarında aritmetik ortalamanın bir veri kümesindeki elemanlarla olan ilişkisi ve aritmetik ortalamanın veri kümesini temsil eden bir değer olduğuna ilişkin tartışmalara yer verilmemiştir. Ders kitaplarındaki problemlerin çoğunluğu sözel formda sorulmuş olup, problemler sadece ekle-böl algoritması kullanılarak çözülmüştür. Problemlerin çözümlerinde farklı temsil biçimlerinden yararlanılmamış olup sadece aritmetik formda çözümler yapılmıştır. Ders kitaplarındaki bu içerik öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını yüzeysel olarak öğrenmelerine ve muhakeme düzeyindeki sorularda zorlanmalarına neden olabilir. Bu açıdan ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının öğretiminde, adil paylaşım ve denge merkezi düşüncesinden yararlanılmalı, ders kitapları farklı tipteki problemler açısından zenginleştirilmelidir. Bunun yanında, ders kitaplarında aritmetik ortalama problemlerinin çözümlerinde farklı çözüm stratejilerinden ve çoklu temsil biçimlerinden yararlanılmalıdır.

Anahtar Kelimeler: Aritmetik ortalama, öğrenme fırsatı, ders kitabı

DOI: 10.16949/turkbilmat.627826

Abstract: In this study, it was investigated how the concept of arithmetic mean (an essential concept in the learning domain of data) was presented in middle school coursebooks in Turkey, what type of problems related to the arithmetic mean was covered, the type of representation form through which the problems were presented, and the type of representation forms and solving strategies used for solving problems. For this study, the coursebooks used in the 2019–2020 academic year were analyzed. A 2D framework (horizontal and vertical analysis) was used to answer research questions, and the analyses were conducted by two researchers. Although balance and fair-share models are strong analogies for conceptually understanding arithmetic mean, the two coursebooks of grade 6 did not sufficiently cover these models. Furthermore, the relationship between the arithmetic mean and elements in a data set and the discussions related to arithmetic mean as a value that represents the data set were not covered in coursebooks. Most problems in the coursebooks were verbally developed, and the problems were solved only via the add–divide algorithm. Note that, for solving these problems, different representation forms were not used, and the solutions were only presented in the arithmetic form. In the coursebooks, the content might cause students to superficially learn the concept of arithmetic mean and have difficulties with questions at the evaluation level. Thus, for teaching the concept of arithmetic mean, fair share and balance point should be used via coursebooks, and they should be enriched in terms of problems in various types. Furthermore, different strategies and multiple representation forms should be used for solving arithmetic mean problems in coursebooks.

Keywords: Arithmetic mean, learning opportunity, coursebook

See English Version

1. Giriş

TIMSS (Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması) ve PISA (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) gibi karşılaştırma çalışmaları ülkelerin matematik başarılarını ortaya koyan önemli göstergelerden biridir. Türkiye, 2015 yılında yapılan Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması'nda veri ve olasılık öğrenme alanında 467 puanla düşük bir performans gösterebilmiştir (Mullis, Martin, Foy ve Hooper, 2016). TIMSS 2011'de 5 restoranda çalışan personel sayısı verilerek, restoranlarda çalışan personel sayısının ortalamasının sorulduğu bilme düzeyindeki soruyu Türk öğrencilerinin doğru cevaplama yüzdesi 48 iken, bu 5 restorandan birindeki 30 olan personel sayısı 50 olduğunda aritmetik ortalamanın nasıl değişeceğini yorumlayın şeklindeki uygulama düzeyindeki soruyu Türk öğrencilerinin sadece %25'i doğru cevaplayabilmiştir (Mullis, Martin, Foy ve Arora, 2012). Benzer şekilde TIMSS 2015'te Ahmet isimli bir öğrencinin matematik dersinde ilk dört sınavının puanı 9, 7, 8, 8 olarak veriliyor. Ahmet son bir sınava daha gireceğine (en fazla 10

Sorumlu yazar: Suphi Önder Bütüner **e-posta:** s.onder.butuner@bozok.edu.tr; s.onder.butuner@yobu.edu.tr

Kaynak Gösterme: Bütüner, S. Ö. (2020). Türkiye'de okutulan ortaokul matematik ders kitaplarının aritmetik ortalama kavramına ilişkin öğrencilere sunduğu öğrenme fırsatları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 11*(1), 157-187.

puan alabilir) ve bu beş sınavın ortalamasının 9 olmasını istediğine göre bunun mümkün olup olmayacağını yorumlayınız? şeklindeki muhakeme düzeyindeki soruyu Türk öğrencilerin sadece %35'i doğru cevaplayabilmiştir (Mullis ve ark., 2016). Bu sonuçlar, Türk öğrencilerin uygulama ve muhakeme düzeyindeki aritmetik ortalama problemlerindeki başarı düzeyinin, bilme düzeyindeki aritmetik ortalama problemlerine nazaran daha düşük olduğunu ortaya koymaktadır. Türk öğrencilerin performanslarının düşük oluşunu birçok nedene dayandırmak mümkündür. Ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının sunulma biçiminin, aritmetik ortalama ile ilgili ne tip problemlere ve çözüm stratejilerine yer verildiğinin, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulup, yapılan çözümlerde hangi temsil biçimlerinden yararlanıldığının incelenmesi öğrencilerin matematik performanslarını açıklama noktasında yardımcı olabilir. Çünkü Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması'na göre (TIMSS), ders kitapları öğretmenlerin bir konuyu nasıl sunacaklarına karar verirken faydalandıkları ana kaynak olup, öğretmenlerin neyi, nasıl öğreteceklerini ve öğrencilerini ne tip ödev veya etkinliklere maruz bırakacaklarını etkilemektedir (Son ve Senk, 2010; Stein, Remillard ve Smith, 2007). Ders kitaplarında konuların sunulma şekli, öğrencilerin öğrenmesi için gerekli olan pedagojik yaklaşımları ve çeşitli fırsatları harekete geçirdiğinden önemlidir. Ders kitapları, resmi bir müfredat kılavuzunda (başka bir deyişle, amaçlanan müfredat) verilen müfredat hedeflerinin belirlenmesine yardımcı olur. Aynı zamanda, sınıfta ne öğretileceğini ve nelerin öğrenileceğini (başka bir deyişle uygulamalı müfredat) belirler. Bu nedenle, ders kitapları "amaçlanan müfredat" ile "uygulamalı müfredat" arasında bir köprü görevi görür. Ders kitaplarının analizi, sınıfta nelerin öğretilmesi ve öğrenilmesi gerektiğine dair, amaçlanan müfredata nazaran daha net bir resim sunar (Flanders, 1994). Bu çalışmada aritmetik ortalama kavramının Türk ders kitaplarında nasıl sunulduğu, aritmetik ortalama ile ilgili ne tip problemlere yer verildiği, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğu, problemlerin çözümlerinde hangi temsil biçimleri ve çözüm stratejilerinin kullanıldığı incelenmiştir.

1.1. Çalışmanın Gerekçesi ve Önemi

Aritmetik ortalama günlük hayatta ve istatistikte karşımıza çıkan önemli kavramlardan biridir. Günlük hayatta meteoroloji, tıp, tarım gibi çeşitli alanlarda aritmetik ortalama kavramı kullanılmaktadır. Çoğu öğrenci, formal bir istatistik eğitimi almadan önce bu kavramla günlük hayatta (boy, yaş, puan ortalaması örneklerinde olduğu gibi) karşılaşmaktadırlar (Chatzivasileiou, Michalis ve Tsaliki, 2010; Zazkis, 2013). Veri analizi ve olasılık, Matematik Öğretim Programı'nın beş alanından biridir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). 2018 yılında Matematik Öğretim Programı revize edilmiş, 2013 Öğretim Programı'nda olduğu gibi Matematik Dersi Öğretim Programı'nın her kademesinde istatistik kavramlarının öğretimine yer verilmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018, s. 66, 72).

Aritmetik ortalama günlük yaşamda karşımıza çıkan ve istatistik öğrenme alanında önemli bir kavram olmasına karşın, yapılan çalışmalar öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili problemlerin çözümünde aritmetik ortalama algoritmasına (cebirsel veya aritmetik formda çözüm) bağlı kaldıklarını göstermektedir (Cai, 1998, 2000; Enisoğlu, 2014; Mokros ve Russell, 1995; Uçar ve Akdoğan, 2009). Öğrencilerin aritmetik ortalama algoritmasını bilmelerine rağmen, algoritmanın yanlış kullanımından kaynaklı hatalar yaptıkları çalışmalarda ortaya koyulmaktadır (Cai, 1998, 2000; Mevarech, 1983; Pollatsek, Lima ve Well, 1981; Watson ve Moritz, 2000). Öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili yaşadığı zorlukların temelinde, bu kavramla ilgili öğrencilerin kavramsal bir anlayış geliştirmelerine fırsat yaratılmadan, algoritma odaklı bir öğretimin gerçekleştirilmiş olması yatmaktadır (Cai, 1998, 2000). Zayıf kavramsal anlama çeşitli şekillerde kendini gösterebilmektedir. Öğrencilerin ağırlıklandırılmış ortalamayı hesaplamada yaptıkları hatalar (Hardiman, Well ve Pollatsek, 1984; Mevarech, 1983; Pollatsek ve ark., 1981), aritmetik ortalamanın özelliklerini bilmemeleri (Gattuso ve Mary, 1998; Goodchild, 1988; Leon ve Zawojewski, 1991; Strauss ve Bichler, 1988) ve ortalaması bilinen bir veri setinde, verilmeyen elemanı bulurken zorlanmaları (Cai, 1995,1998) bu durumun kanıtıdır. Mokros ve Russell (1995) çalışmalarına katılan öğrencilerin aritmetik ortalama algoritmasına bağlı kaldıklarını ve aritmetik ortalamanın veri setini temsil etme rolünü ihmal ettiklerini tespit etmişlerdir. Strauss ve Bichler (1988, s.72,76) ve Leon ve Zawojewski'nin (1991, s.304) çalışmalarında, öğrenciler aritmetik ortalamanın üç özelliğini ("Aritmetik ortalamadan sapmaların toplamı sıfırdır.", "Sıfır aritmetik ortalama hesabında dikkate alınmalıdır.", "Aritmetik ortalama veri kümesini temsil eden bir değerdir.") anlamada zorlanmışlardır.

Türkiye'de yapılan çalışmalarda da benzer sonuçlara ulaşılmıştır (Enisoğlu, 2014; Uçar ve Akdoğan, 2009). Uçar ve Akdoğan'ın (2009) çalışmalarında, 6., 7. ve 8. sınıfta öğrenim gören her bir sınıf seviyesinde altı öğrenci olmak üzere on sekiz öğrenciye aritmetik ortalama kavramı ile ilgili 5 adet problem verilerek öğrencilerden problemleri çözmeleri istenmiştir. Öğrenciler problemleri çözerken çoğunlukla topla-böl algoritmasını tercih etmişlerdir. Öğrencilerin yarısı ortalama kavramını bir veri grubunu temsil eden bir değer olarak yorumlamamışlardır. Araştırmacılar, bulgulara dayalı olarak öğrencilerin algoritma temelli bir öğretime maruz bırakıldığını ve aritmetik ortalamayı kavramsal olarak öğrenmediklerini ifade etmişlerdir. Kaynar ve Halat (2012) sekizinci sınıf öğrencileri üzerinde yaptıkları çalışmada, öğrencilerin merkezi eğilim ve yayılım ölçülerinin hesaplanmasında veri açıklığı hariç diğerlerinde (aritmetik ortalama, mod) bilgi düzeylerinin çok yetersiz olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bunun yanında öğrenciler, ortalamayı aritmetik ortalama ile ilişkilendirmişler ve problem çözümlerinde aritmetik ortalama algoritmasına başvurmuşlardır. Enisoğlu (2014)

233, yedinci sınıf öğrencisine aritmetik ortalama-tepe değer ve ortanca kavramları ile ilgili altı adet problem vererek öğrencilerden yazılı olarak problemleri çözmelerini istemiştir. Çalışmaya katılan öğrenciler Uçar ve Akdoğan'ın (2009) çalışmasında olduğu gibi, aritmetik ortalama ile ilgili problemleri çözerken çoğunlukla topla-böl algoritmasına bağlı kalmışlardır. Problem çözümlerinde öğrenciler tarafından en çok yapılan hatanın ortalama algoritmasının yanlış kullanımından kaynaklı olduğu tespit edilmiştir. Katılımcılar tarafından ikinci sıklıkla yapılan hata daha küçük veya daha büyük sayılara yönelme olmuştur. Bu hatayı yapan öğrenciler, verilen aritmetik ortalama için uygun veri grubu oluştururken ya tüm verileri aritmetik ortalamadan küçük ya da tüm verileri aritmetik ortalamadan büyük seçmişlerdir. Verilerin hiç birini bilmeyip sadece bu veri grubunun aritmetik ortalamasını bilseydik, verilerle ilgili nasıl yorum yapılabilirdi şeklindeki soruda, öğrencilerin bir kısmı ortalama algoritmasını yanlış kullanma hatasını yaparak yanlış bir değer bulmuşlar ve bu değer üzerinden yanlış yorum yapmışlardır. Bir veri grubundan bir değer çıkarıldığında ortalamanın bundan nasıl etkileneceği sorusuna ise katılımcıların büyük bir kısmı, "aritmetik ortalama azalır" cevabını vermişlerdir. Sütun grafiği gösteriminde verilen iki veri grubunun karşılaştırmasının istendiği soruda ise, katılımcılardan bazıları veri gruplarındaki bir veriye göre karşılaştırma yapmışlardır. Ayrıca, bazı öğrenciler verilen veri gruplarını, ortancayı kullanarak karşılaştırmış ve yanlış karar vermişlerdir. Koparan ve Güven'in (2014) çalışmalarında bazı öğrencilerin merkezi eğilim ve dağılım ölçülerini bildikleri fakat hatalı uygulamalar yaptıkları görülmüştür. Öğrenciler yanlış verileri kullanmaları dışında veri açıklığı bulmada zorlanmamışlardır. Yazarlar, istatistiksel okuryazar bireyler yetiştirilmesinin işlemsel öğrenme yerine kavramsal öğrenmeye, geleneksel yaklaşımlardan ziyade, öğrenci merkezli çağdaş yaklaşımlara daha çok yer verilmesine bağlı olduğunu vurgulamışlardır. Çakmak ve Durmuş (2015), aritmetik ortalamada yapılan hataların, dört işlemdeki eksikliklerin yanı sıra aritmetik ortalamanın nasıl hesaplanacağını bilememe ve tam bölünemeyen sayılarda ondalıklı olarak bölme yapamama gibi sorunlardan kaynaklandığını tespit etmişlerdir. Çalışmada, rutin bir aritmetik ortalama sorusuna doğru cevap veren öğrenciler, rutin olmayan bir problemle karşılaştığı zaman aynı başarıyı gösterememişlerdir.

Özetle Uluslararası ve Ulusal bazda yapılmış çalışmalar Türk öğrencilerin aritmetik ortalama kavramı ile ilgili zorluklar yaşadıklarını ve kavramsal anlamadan uzak olduklarını ortaya koymaktadır. Revize edilerek 2018 yılında uygulanmaya başlayan Matematik Dersi Öğretim Programı'nın özel amaçları içerisinde "öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine anlamalarının gerekliliği" üzerinde durulmaktadır (MEB, 2018, s. 11). Türk öğrencilerin veri ve olasılık öğrenme alanında düşük bir performans göstermiş olması ve matematik öğretim programında "matematiksel kavramların derinlemesine anlaşılması gerektiğine" ilişkin vurgu, öğretmenlerin bir konuyu nasıl sunacaklarına karar verirken faydalandıkları ana kaynak olan ders kitaplarının incelenmesini gerekli kılmaktadır. Bu bakımdan çalışmada veri işleme öğrenme alanının önemli kavramlarından biri olan aritmetik ortalama kavramının Türk ders kitaplarında nasıl sunulduğu, aritmetik ortalama ile ilgili ne tip problemlere yer verildiği, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğu, problemlerin çözümlerinde hangi temsil biçimleri ve çözüm stratejilerinin kullanıldığı incelenmiştir. Yapılan çalışma, ders kitaplarının iyileştirilmesi noktasında öğretim programı hazırlayıcılara katkı sunmakla birlikte, Türk öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili problemlerde düşük performans göstermelerinin nedenleri hakkında kestirimlerde bulunulmasına yardımcı olacaktır. Yukarıda belirtilenler ışığında araştırmanın problemleri şu şekilde sıralanabilir.

- Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramı nasıl sunulmuştur?
- Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama ile ilgili ne tip çözümlü problemlere yer verilmiş ve problemler hangi temsil biçiminde sorulmuştur?
- Türk ders kitaplarında problemlerin çözümünde hangi çözüm stratejilerine yer verilmiş ve çözümde hangi temsil biçimi/biçimleri kullanılmıştır?

Bir sonraki kısımda sırasıyla; aritmetik ortalama kavramını işlemsel ve kavramsal olarak anlamanın ne ifade ettiğinden, aritmetik ortalamayla ilgili problem tipleri ve problemlerin çözümünde kullanılabilecek temsil biçimleri ve çözüm stratejilerinden bahsedilmiştir.

1.2. Aritmetik Ortalama Kavramını Anlama: İşlemsel ve Kavramsal

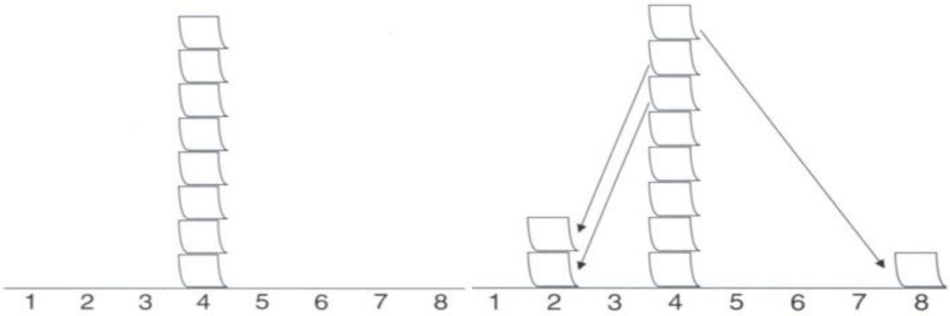
Hiebert ve Lefevre (1986) işlemsel bilginin iki tipine temas etmiştir. İşlemsel bilginin ilk tipi, matematiksel fikirleri temsil eden sembollere aşina olmayı ve sembollerin kabul edilebilir bir biçimde yazılması için sözdizimsel kuralların farkındalığını içerir. İşlemsel bilginin ikinci tipi ise matematik problemleri çözmek için kullanılan prosedürleri, algoritmaları ve kuralları içerir. Örneğin, $4 + 2x = 10$ yazımı kabul edilebilir bir gösterim iken, $4+= x2 - 10$ yazımı kabul edilemeyecek bir gösterimdir. Bu bilgi işlemsel bilginin ilk tipidir. $4 + 2x = 10$ eşitliğini çözmek için bir algoritma veya kural bilmek işlemsel bilginin ikinci tipi olmaktadır. Bu görüş aritmetik ortalama kavramı için düşünüldüğünde aritmetik ortalamanın gösteriminin $\bar{X}$ şeklinde olduğunu bilen bir öğrenci işlemsel bilginin ilk tipini göstermiş olacaktır. Bir veri setinin aritmetik ortalamasını bulmak için ekle-böl algoritmasını kullanan bir öğrenci ikinci tip işlemsel bilgiye sahiptir.

Aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılması; aritmetik ortalamanın uygun bir merkezi eğilim ölçüsü olduğu bağlamların tanınmasını (Watson ve Moritz, 2000), ağırlıklı ortalama problemlerin çözülmesini (Mevarech, 1983; Pollatsek ve ark., 1981), aritmetik ortalamanın bir veri kümesini temsil eden bir değer olarak yorumlanmasını (Leavy, 2001; Mokros ve Russell, 1995) ve aritmetik ortalamanın görsel ve kinestetik anlamalarına sahip olunmasını (Cai, 2000; Ginat ve Wolfson, 2002; Leavy, 2001) gerektirir. Denge ve adil-paylaşım modelleri aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasında güçlü birer analoji olarak kabul edilmektedir (Cai ve Moyer, 1995; Hardiman ve ark., 1984; Uccellini, 1996; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). İstatistiksel bir kavram olarak aritmetik ortalamanın, bir veri kümesi için ne ifade ettiği adil paylaşım ve denge modelleri kullanılarak öğretilebilir. Hardiman ve arkadaşları'nın (1984) yaptıkları deneysel çalışma, denge modeli ile yapılan öğretimin öğrencilerin ağırlıklandırılmış ortalamayı daha iyi anlamalarını sağladığını göstermiştir. Cai ve Moyer (1995) çalışmalarında adil paylaşım düşüncesinin öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili problem çözümlerindeki performanslarını olumlu yönde etkilediğini tespit etmişlerdir. Bu bakımdan çalışmanın birinci problemine cevap verebilmek amacıyla ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramına giriş yapılırken, denge ve adil paylaşım düşüncesinden yararlanılıp yararlanılmadığı, eğer yararlanılmışsa bunun nasıl yapıldığı incelenmiştir.

1.3. Aritmetik Ortalamanın Kavramsal Olarak Anlaşılmasında Problem Tipleri ve Çözüm Stratejileri

Bu çalışmada, çözümü yapılmış olan problemlerin tipi ve çözümde hangi strateji/stratejilerin kullanıldığı incelenen diğer durumdur. Vincent ve Stacey (2008) matematik ders kitaplarında çözümü öğrencilerden beklenen sorulardan önce bu sorulara benzer tarzdaki çözümlü örneklere yer verildiğini belirtmişlerdir. Etkili çözümlü örnekler, öğrencilerin matematik anlamalarını daha verimli bir şekilde geliştirmelerini sağlamasından ötürü, matematik kitaplarında öğrencilerin ilk ilgisini çeken kısımlardandır. Öyle ki, öğrenciler üzerinde çalışacakları probleme uygun olan çözümlü örnekleri seçip, onlardan yararlanma eğilimindedirler (Weinberg, Wiesner, Benesh ve Boester, 2012). Öğrencilerin aritmetik ortalama kavramına ilişkin yaşadığı zorluklar ve bu zorlukların temelinde öğrencilerin aritmetik ortalamayı sadece ekle-böl algoritmasının kullanımı sonucu bulunan bir değer olarak düşünmeleri, ders kitaplarına öğrencilerin işlemsel ve kavramsal anlamalarını yoklayan problemlerin dengeli şekilde dağıtılmasının önemine işaret etmektedir. Dolayısıyla çalışmada öncelikle çözümü yapılmış problemlerin tipi tespit edilmiştir.

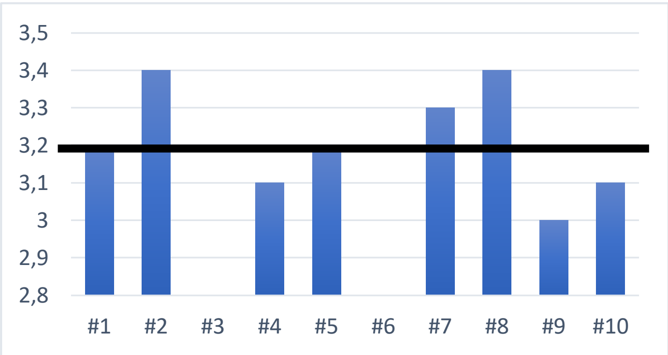
Alan yazında aritmetik ortalama ile ilgili kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerini ölçen çeşitli problemler ve bu problemlerin çözümünde kullanılan stratejilere vurgu yapılmaktadır. Cai (2000) çalışmasında öğrencilerin aritmetik ortalama kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal anlama düzeylerini belirlemek için öğrencilere iki problem durumu vermiştir. Öğrencilerin işlemsel anlama düzeylerini ölçen ilk problemde, öğrencilerden verilen dört sayının aritmetik ortalamasını bulmaları istenmiştir. Öğrencilerin kavramsal anlama düzeylerini ölçen görsel formda sunulmuş (sayılar birim küplerle modellenmiş), ikinci problemde ise bir veri setinin aritmetik ortalaması verilerek, veri setinde verilmeyen elemanın ne olduğu sorulmuştur. Cai, Lo ve Watanabe (2002) Amerika, Tayvan ve Çin ders kitaplarını aritmetik ortalama kavramı açısından karşılaştırdıkları çalışmalarında, kitaplarda yer alan aritmetik ortalama problemlerini üç kategori altında değerlendirmişlerdir. İlk kategoriye giren problemler, aritmetik ortalama algoritmasının doğrudan kullanımını gerektiren problemlerdir (Örneğin, bir apartmanın altı dairesinin her birinde oturan birey sayısı 6, 4, 3, 4, 3 ve 4'tür. Bu altı dairede oturan ortalama kişi sayısı kaçtır?). Bu tip problemler öğrencilerin işlemsel hesaplama becerisini yoklamaktadır. İkinci kategoriye giren problemler, algoritmanın esnek kullanımının gerekli olduğu problemlerdir (Örneğin, Bir apartmanda oturan 8 ailenin ortalama birey sayısı 4 olduğuna göre, her bir ailedeki birey sayısını grafik çizerek, grafik üzerinde gösteriniz). Üçüncü kategori ise istatistik bağlamı içerisinde aritmetik ortalamanın kullanımını ve uygun şekilde yorumlanmasını gerektiren problemleri içermektedir (Örneğin, iki basketbol oyuncusundan biri Milli Takıma seçilecektir. İlk oyuncunun son sekiz maçında attığı basket sayısı 21, 16, 23, 21, 20, 17, 16, 22'dir. İkinci oyuncunun son altı maçında attığı basket sayıları 24, 18, 21, 25, 22, 28'dir. Milli takım koçu sizce hangi oyuncuyu milli takıma seçmelidir?; Bir apartmanda oturan ailelerin ortalama çocuk sayısı 3.5 olabilir mi? Neden?; Bir matematik sınavından 5 öğrencinin aldığı puanlar sırasıyla 56, 60, 49, 62 ve 54'tür. Sınava girmeyen bir öğrencinin notu olan 95, bu puanlar arasına dahil edildiğinde ilk durum ile ikinci durum arasında sınıfın başarı ortalamasının hesaplanmasında nasıl bir farklılık olur?). Görüldüğü gibi, ikinci ve üçüncü kategoride yer alan problemler, öğrencilerin işlemsel hesaplama becerisinden daha üst düzey anlamalarını yoklayan problemlerdir (Bremigan, 2003; Gfeller, Niess ve Lederman, 1999; Leavy ve O'Loughlin, 2006). Leavy ve O'Loughlin (2006) aritmetik ortalama kavramının kavramsal olarak anlaşılıp anlaşılmadığının tespitinde, eşit elemana sahip olmayan iki veri kümesinin karşılaştırılmasını, ağırlıklandırılmış ortalamanın bulunmasını, aritmetik ortalaması verilen yedi elemanlı bir veri setinin oluşturulmasını gerektiren problemler kullanmışlardır. Hardiman ve arkadaşları (1984) ve Russell ve Mokros (1996) denge modelinin kullanımına dayalı inşa problemlerinin öğrencilerin aritmetik ortalamayı kavramsal olarak öğrenip öğrenmediklerini ortaya koyabileceğini ifade etmişlerdir. "Bir apartmanda oturan 8 ailenin ortalama birey sayısı 4 olduğuna göre, her bir ailedeki birey sayısını aşağıda gösteriniz." tipindeki bir inşa probleminin çözümünde öğrencilerin izledikleri yollar ve kullandıkları çözüm stratejileri, öğrencilerin ilgili kavramı öğrenip öğrenmediklerini ortaya koymada yardımcı olmaktadır (Şekil 1). Hardiman ve arkadaşları (1984) ve Russell ve Mokros (1996) tarafından vurgulanan bu problem yapısını, Cai ve arkadaşları (2002) yaptıkları sınıflandırmada ikinci kategoriye (algoritmanın esnek kullanımının gerekli olduğu problemler) almışlardır.



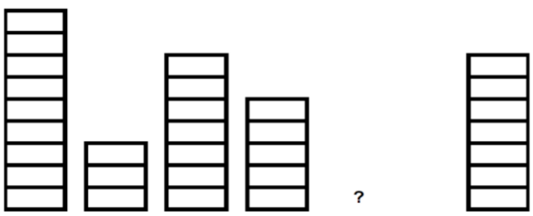
Şekil 1. Bir apartmanda oturan ailelerin ortalama birey sayısının 4 olduğu iki farklı durum

Bremigan (2003) ise aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasının, problem çözümlerinde aritmetik ortalamanın yedi özelliğinin (yedi özellik için bkz. Strauss ve Bichler, 1988) bilinmesine bağlı olduğunu ifade etmiş ve çalışmasında bu yedi özellikle ilgili problem durumlarına örnekler vermiştir. Aritmetik ortalamanın öğrenciler tarafından kavramsallaştırılıp kavramsallaştırılmadığını yoklayan ve önceki çalışmalarda kullanılmış olan iki problem Şekil 2'de verilmiştir.

Problem 1. Kimya laboratuvarında bir öğrenci bir cismi on kez tartmıştır. Tartma işleminin sonuçları aşağıdaki grafikte sunulmuştur. Öğrenci, üçüncü ve altıncı kez yaptığı tartma işleminin sonuçlarını kaybetmiştir. Grafikte koyu çizginin gösterdiği gibi on ağırlığın ortalaması 3,2 olarak hesaplandığına göre, üçüncü ve altıncı tartma işleminin değerleri ne olabilir? Çizim yaparak gösteriniz (Konold ve Pollatsek, 2002).



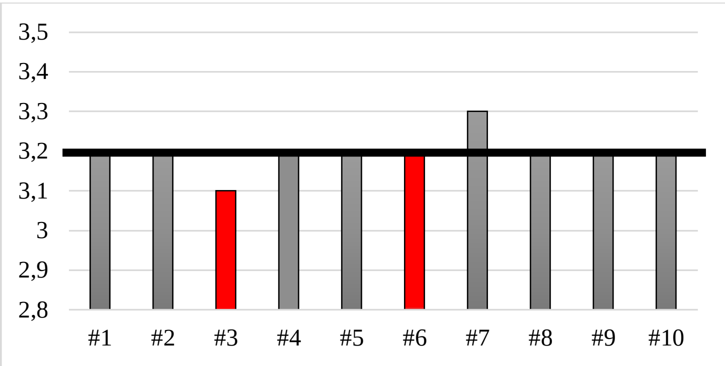
Problem 2. Dört çocuğun önündeki blok yığınları verilmiştir. Beşinci çocuğun blok yığınında üst üste kaç blok olsun ki aritmetik ortalama 7 olsun? (Cai ve Moyer, 1995; Uccellini, 1996).



Şekil 2. Aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılıp anlaşılmadığını yoklayan iki problem

Şekil 2'de verilmiş olan problemler, Cai ve arkadaşlar'ının (2002) yaptığı sınıflandırmada algoritmanın esnek kullanımının gerekli olduğu problem tipidir. Dikkat edilirse problemlerde aritmetik ortalama verilip öğrencilerden veri kümesinde verilmeyen eleman/elemanların değerlerini bulmaları beklenmektedir. Öğrenciler Şekil 2'de verilmiş olan problemleri çözerken farklı çözüm stratejileri kullanabilirler (Cai, 2000; Marnich, 2008). Öğrencilerin kullandıkları bu çözüm stratejileri onların aritmetik ortalama kavramını kavramsal olarak öğrenip öğrenmedikleri hakkında bilgi verebilir (Marnich, 2008; Mokros ve Russell, 1995; Watson ve Moritz, 2000). Alan yazında aritmetik ortalama problemlerinin çözümünde "denge merkezi", "adil paylaşım", "algoritmaya dayalı" ve "tahmin-kontrol" şeklinde dört stratejiden bahsedilmektedir (Cai, 2000; Marnich, 2008). Aritmetik ortalama problemlerini denge merkezi ve adil paylaşım düşüncesiyle çözebilen öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını, kavramsal olarak anladıkları söylenebilir (Hardiman ve ark., 1984; Marnich, 2008;

Uccellini, 1996). Aksine, algoritmaya dayalı çözüm stratejisi ve tahmin kontrol stratejisini kullanan öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını derinlemesine öğrendiklerini kesin olarak söylemek güçtür. Örneğin, algoritmaya aşırı bağlı kalan öğrenciler birinci problemi çözerken $\frac{3,2+3,4+x+3,1+3,2+y+3,3+3,4+3,0+3,1}{10}=3,2$ türünden çok bilinmeyenli bir eşitlikle karşı karşıya kalırlar. Bu durum çözümü zorlaştıracaktır. Dolayısıyla aritmetik ortalama formülünün doğru şekilde kullanılarak doğru sonuca ulaşılması veya matematiksel olarak sağlam bir çözüm girişimi öğrencinin derin bir kavramsal anlama gösterdiğini ortaya koymada yeterli görülmemelidir (Marnich, 2008). Kavramsal anlamaya sahip öğrenciler, denge merkezi problemlerini çözerken denge fikrine veya blok istiflemeye etkili şekilde başvurulabilirler. Adil paylaşım problemlerinin çözümünde olduğu gibi, denge merkezi problemlerinin çözümünde de aritmetik ortalama algoritması kullanılabilir. Ancak bu durum öğrencinin yukarıda da ifade edildiği gibi aritmetik ortalama kavramına ilişkin derin bir öğrenme gösterdiğine ilişkin kesin bir kanıt değildir (Hardiman ve ark., 1984; Marnich, 2008; Uccellini, 1996). Birinci problemin adil paylaşım düşüncesiyle çözümünde aşağıdaki şekilde dağıtma işlemi yapılarak, üçüncü ve altıncı tartma işleminin değerlerine (kırmızı sütunlar) Şekil 3'de gösterildiği gibi ulaşılabilir.



Şekil 3. Birinci problem'in adil paylaşım düşüncesiyle çözümü

Birinci problem, denge merkezi düşüncesiyle de çözülebilir. Aritmetik ortalama 3,2 olduğuna göre, yedinci, sekizinci, dokuzuncu ve onuncu ölçüm sonuçları birbirini dengelemektedir. Birinci ve beşinci ölçüm sonucu değerleri, aritmetik ortalamaya eşittir. İkinci ölçüm sonucu, aritmetik ortalama değerinden 0,2 kadar büyük, dördüncü ölçüm sonucu aritmetik ortalama değerinden 0.1 kadar küçüktür. O halde, +0,1'lik bir fark oluşmaktadır. Bu durumda, üçüncü ölçüm sonucunu 3,2 alırsak, altıncı ölçüm sonucunu 3,1 olarak almamız gerekir. Örnekleri zenginleştirmek adına Tablo 1'de iki adet problem durumu verilmiş ve problemin çözümünde algoritmaya aşırı bağlı kalma durumu örneklendirilmiştir (Marnich, 2008).

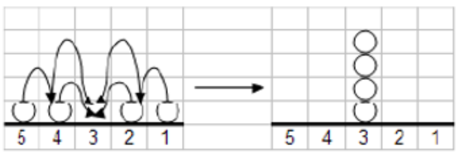
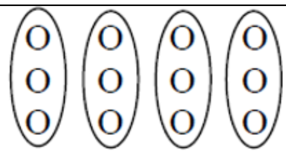
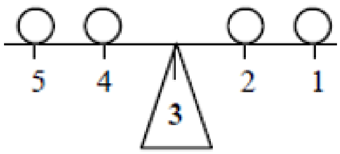
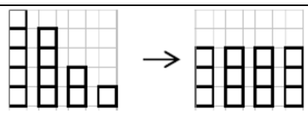
Tablo 1. Aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılıp anlaşılmadığını yoklayan iki problem

Problem 3. a, b, ve c gibi üç sayının aritmetik ortalaması x olarak veriliyor. a, x'den 4 fazla ve b, x'den 5 fazla olduğuna göre c'nin x ile olan ilişkisi nedir?
Problem 4. Markette bir işçi olarak çalışıyorsunuz ve 9 torba patates cipsi üzerine fiyat etiketi yapıştırmanız istenmekte. Cipslerin ortalama fiyatı 1,38 TL. Hiçbir torbanın fiyatı 1,38 TL olmayacak. Ayrıca bir torbaya 1,30 TL ve ikinci bir torbaya 1,35 TL'den fiyat vermelisiniz. Kalan yedi fiyat etiketini oluşturun.

Örneğin, 4. problemin çözümünde algoritmaya bağımlı kalan öğrenciler $\frac{1,30+1.35+t+u+v+w+x+y+z}{9}=1,38$ türünden çok bilinmeyenli bir eşitlikle karşı karşıya kalacaklardır. Bu tip bir çözüm öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını sadece bir algoritma olarak düşündüklerini göstermektedir (Marnich, 2008). Halbuki üçüncü ve dördüncü problemlerin denge merkezi düşüncesi ile çözülmesi, öğrencilerin aritmetik ortalamayı istatistiksel bir kavram olarak derinlemesine öğrenmiş olduklarının göstergelerinden biridir. Üçüncü soruda a sayısı x'den 4, b sayısı x'den 5 fazla ise, x'in aritmetik ortalama (denge merkezi) olabilmesi için c'nin x'den 9 az olması gerekmektedir. Dördüncü problemin çözümü de algoritmaya ihtiyaç duyulmadan benzer düşünceyle gerçekleştirilebilir. Yukarıda belirtilenler, ders kitabında aritmetik ortalama ile ilgili çözümü yapılmış problemlerin tipinin ve çözümde kullanılan stratejilerin belirlenmesinin önemine işaret etmektedir. Bu çalışmanın ikinci ve üçüncü problemleri kapsamında aritmetik ortalama ile ilgili ders kitaplarında yer alan çözümlü problemlerin tipinin belirlenmesinde Cai ve arkadaşları (2002) tarafından yapılan sınıflandırma kullanılmıştır. Problemlerin çözümünde kullanılan stratejiler ise "denge merkezi", "adil paylaşım", "algoritmaya dayalı", "tahmin-kontrol" şeklinde kodlanmıştır.

1.4. Aritmetik Ortalama Problemlerinin Sunumunda ve Çözümünde Kullanılabilecek Temsiller

Temsil, okul matematiğinin ilke ve standartlarında belirtilen matematiksel süreç standardından biridir (NCTM, 2000). Çoklu temsillerin esnek şekilde kullanımı, öğrencilerin matematiksel kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri anlamlı olarak öğrendiklerinin göstergelerinden biridir (Brenner, Herman, Ho ve Zimmer, 1999; NCTM, 2000). Temsil yeteneği, öğrencilerin matematiksel kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri kavramalarında önemli bir süreç standardı olarak kabul edilmektedir. Nitekim öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerinde, çoklu temsil kullanımıyla gerçekleştirilen öğretimin olumlu etkilerini ortaya koyan çalışmalar vardır (Ainsworth, 2006; Rau, Aleven ve Rummel, 2009; Schnotz ve Bannert, 2003). Cai ve Moyer (1995), öğrencilerin aritmetik ortalama problemlerini çözerken sözel, sembolik ve resim temsiline başvurduklarını tespit etmişlerdir. Öğrencilerin kullandıkları temsil biçimleri seçtikleri çözüm stratejileri ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, ekle-böl stratejisini kullanan öğrenciler çoğunlukla sembolik temsile yönelmişlerdir. Seviyeleri eşitleme stratejisini kullanan öğrenciler ise resim temsiline başvurmuşlardır. Problemlerin hangi temsil biçiminde sunulduğu da öğrencilerin problemi çözerken tercih ettikleri temsil biçimini etkilemektedir. Yapılmış çalışmalar, Amerika ders kitaplarında, Çin kitaplarına kıyasla görsel formda sunulmuş problemlerin fazla olduğunu bu yüzden Amerikalı öğrencilerin Çinli öğrencilere kıyasla problem çözümlerinde görsel temsili kullanmayı daha çok tercih ettiklerini ortaya koymaktadır (Brenner ve ark., 1999; Cai, 1995). Matematik derslerinde çoğu zaman öğrencilere sembolik formda veya sözel formda sunulmuş bir problem verilerek, öğrencilerden problemi sembolik formda (aritmetik ortalama algoritması) çözmeleri beklenmektedir. Aritmetik ortalama kavramını, kavramsal olarak öğrenmiş olan öğrenciler ise çözümlerinde sık sık çoklu temsilleri kullanmaya yönelmişlerdir. Bu açıdan ders kitapları farklı temsil biçimleri kullanılarak sorulmuş problemler ve farklı çözüm stratejileri açısından zenginleştirilmelidir. Bunun yanında yapılan çözümlerde çoklu temsil biçimlerinin kullanımı özendirilmelidir. Böyle bir zenginleştirme öğrencileri, kavramsal öğrenme sürecine sokabilir (Duval, 2006) ve öğrencilerde zengin bir kavram imajının oluşmasına fırsat sunabilir (Tall, 1988). Bu bakımdan çalışmanın ikinci ve üçüncü problemleri kapsamında, ders kitabında yer alan çözümlü problemlerin sunumunda kullanılan temsil biçimleri, "sözel temsil", "görsel temsil" ve "çoklu temsil" şeklinde üç kategoride, problemin çözümünde kullanılan temsil biçimleri ise Şekil 4'te verildiği üzere "sözel", "resim", "manipulatif" ve "sembol" olarak dört kategoride değerlendirilmiştir.

	Denge Merkezi	Adil Paylaşım
Sözel	Bir sınıftaki 4 tabakta 5, 4, 2 ve 1 adet kek vardır. Tabaktaki kek sayılarının orta noktasını veya denge noktasını temsil eden sayı nedir?	Bir sınıftaki 4 tabakta 5, 4, 2 ve 1 adet kek vardır. Bu kekler dört öğrenciye eşit olarak paylaştırılacaktır. Bunun için Kekleri toplayıp dört tabağa eşit olarak paylaştırın.
Resim		
Manipülatif		
Sembol	$(5-x) + (4-x) + (2-x) + (1-x) = 0$ $12 - 4x = 0 \ldots x = 3$	$5+4+2+1=12 \ \ldots \ 12 \div 4 = 3$

Şekil 4. Aritmetik ortalama problemlerinin çözümünde kullanılabilecek temsil biçimleri (Marnich, 2008)

2. Yöntem

Çalışmada nitel analiz yöntemlerinden basılı ya da dijital materyallerdeki verileri anlamak ve anlamlandırmak için sistematik bir inceleme ve yorumlama gerektiren doküman analizi tekniği (Bowen, 2009) kullanılmıştır. Aşağıda sırasıyla çalışmada kullanılan ders kitaplarından, veri toplama ve analiz sürecinden ve çalışmanın geçerliği ve güvenirliğinden bahsedilmiştir.

2.1. Çalışmada Kullanılan Ders Kitapları

Türkiye'de aritmetik ortalama kavramına altıncı ve yedinci sınıf kademelerinde yer verilmektedir. Bu çalışmada Türk okullarında okutulan iki adet 6. sınıf bir adet 7. sınıf matematik ders kitabı kullanılmıştır.

Türkiye'de hangi kitapların kullanılacağı Milli Eğitim Bakanlığının kontrolü altındadır. Türk Milli Eğitim Bakanlığı, Türk okullarında kullanılacak kitapları http://www.eba.gov.tr/ekitap internet sitesinde yayımlamaktadır. Çalışma kapsamında incelenen Türk ders kitapları bu siteden temin edilmiştir. Çalışma kapsamına alınan tüm kitaplar, 2019-2020 eğitim öğretim yılında kullanılan kitaplardır. Çağlayan, Dağıstan ve Korkmaz (2018) tarafından yazılan altıncı sınıf matematik ders kitabı çalışma içerisinde TR6A, Bektaş, Kahraman ve Temel (2018) tarafından yazılan altıncı sınıf matematik ders kitabı çalışma içerisinde TR6B şeklinde, Oğan ve Öztürk (2019) tarafından yazılan yedinci sınıf matematik ders kitabı ise çalışma içerisinde TR7 şeklinde verilmiştir.

2.2. Teorik Çerçeve

Çalışmanın araştırma sorularını cevaplandırmak için iki boyutlu (yatay ve dikey analizler) bir çerçeve kullanılmıştır (Charalambous, Delaney, Hsu ve Mesa, 2010; Hong ve Choi, 2014). Yatay analiz, okuyuculara ders kitapları hakkında belirli bir konuya kaç saat süre ayrıldığı, konu ile ilgili kazanımların neler olduğu ve konunun hangi sınıf düzeyinde verildiği ile ilgili büyük bir resim sunmaktır. Ancak sadece yatay analiz, ders kitabı yazarlarının gerçekte neyi amaçladıkları hakkında ayrıntılı bilgi vermez. Dikey analiz matematiksel içeriğin detaylı bir şekilde anlaşılmasını sağlayabilir. Şöyle ki, bu analizde ilgili matematiksel kavramın içeriğinin nasıl sunulduğu, hangi temsil biçimlerinin kullanıldığı, ilgili kavramla ilgili ne tür problemlere ve çözüm stratejilerine yer verildiği ortaya koyulabilir.

Bu çalışmada, ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının öğretim içeriği incelenerek, ders kitaplarının öğrencilerin ilgili kavramı kavramsal olarak öğrenmelerine ne ölçüde hizmet ettiği ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bu yüzden içerik analizinde öncelikle aritmetik ortalama kavramının öğretimine nasıl başlandığı tespit edilmiştir. Bu aşamada ders kitaplarında aritmetik ortalama "matematiksel bir kural olarak mı sunulmuştur? Eğer öyleyse nasıl?" veya "veri kümesini temsil eden bir değer olarak mı sunulmuştur? Eğer öyleyse nasıl?" sorularına cevap aranmıştır. Bir sonraki aşamada ders kitaplarında yer verilen çözümlü problemler ve problemlerin çözümünde kullanılan temsil biçimleri ve stratejiler incelenmiştir. Problemler incelenirken Cai ve arkadaşları'nın (2002) yaptıkları sınıflandırmadan yararlanılmıştır. Onlar aritmetik ortalama problemlerini, "Doğrudan aritmetik ortalama algoritmasının kullanıldığı problemler", "Aritmetik ortalama algoritmasının esnek kullanımını gerektiren problemler" ve "istatistik bağlam içerisinde aritmetik ortalamanın kullanımını ve yorumlanmasını gerektiren problemler" şeklinde üç kategoride değerlendirmişlerdir (Tablo 2).

Tablo 2. Problemlerin sınıflandırılmasında kullanılan teorik çatı (Cai ve ark., 2002)

Kod	Problemlerin Sınıflandırılması	Örnek
A	Doğrudan Algoritma Kullanımı	
A1.	Tablo, grafik vb. formda verilen veri setinin ortalamasının sorulduğu problemler	Bir apartmanın altı dairesinde oturan kişi sayısı sırasıyla 6, 4, 3, 4, 3 ve 4'tür. Dairelerde oturan ortalama kişi sayısı kaçtır?
A2	Ortalama ve veri sayısı verilip, toplamın sorulduğu problemler	7 arkadaş bir hediye alacaklar. Her birinin hediyeye ortalama katkısı 50TL olduğuna göre, hediyeye verilen toplam para miktarı nedir?
B	Aritmetik ortalama algoritmasının esnek kullanımı	
B1	Aritmetik ortalama verilip, veri kümesindeki verilmeyen bir veya daha fazla elemanın ne olabileceğinin sorulduğu problemler	Bir sporcunun müsabakalarda aldığı puanlar 25, 30, 32, 35, 39, 45'dir. Bu *sporcunun müsabakalardaki* puan ortalamasının en az 35 olması için 6. müsabakada kaç puan almalıdır?
B2	Aritmetik ortalama verilip, veri kümesinin elemanlarının oluşturulması istenen problemler	Bir apartmanda oturan 8 ailenin ortalama birey sayısı 4 olduğuna göre, her bir ailedeki birey sayısını grafik üzerinde gösteriniz.
B3	Çoklu veri kümelerinde genel (overall mean) ortalamanın sorulduğu problemler	İki grup 5. sınıf öğrencisinden 37'si 132 ağaç, 35'i 120 ağaç ekmiştir. 5. sınıf öğrencilerinin ektiği ortalama ağaç sayısı kaçtır?
B4	Ağırlıklandırılmış ortalama problemleri	Bir sınıfta 22 erkek, 18 kız vardır. Erkeklerin boy ortalaması 140,5, kızların boy ortalaması 142,5 olduğuna göre sınıfın boy ortalaması nedir?
C	İstatistik bağlamında ortalamanın kullanımı ve uygun şekilde yorumlanması	
C1	Eşit sayıda eleman içermeyen veri kümelerinin karşılaştırılmasında ortalamanın kullanımı	Bir basketbol koçu iki basketbolcudan birini milli takıma alacaktır. Bu sporculardan ilkinin maçlarda attığı sayılar 21, 16, 23, 21, 20, 17, 16, 22, diğer sporcunun basket sayıları 24, 18, 21, 25, 22, 28'dir. Bu verilere göre koç hangi sporcuyu milli takıma almalıdır?

Tablo 2'nin devamı

C2	Ortalama veri kümesindeki elemanlardan birine eşit olmak zorunda değildir	Bir futbolunun 10 maçtaki gol ortalaması 2,3'tür. Böyle bir durum mümkün olabilir mi? Gol sayısı virgüllü bir sayı olabilir mi?
C3	Daha net bir resim sunmak adına aritmetik ortalamanın açıklıkla birlikte yorumlanmasını gerektiren problemler	Emre ve Cengiz iki futbolcudur. İki futbolcunun üç ay boyunca antremanlarda attıkları gol sayıları Emre: 6, 8 ve 10, Cengiz: 12, 4 ve 8'dir. İki futbolcunun da eşit sayıda ve sürede antrenman yaptıkları bilindiğine göre takımına futbolcu seçmek isteyen bir antrenör hangi futbolcuyu tercih etmelidir?
C4	Veri kümelerini karşılaştırırken aritmetik ortalama, mod ve medyanın hangisinin kullanımının daha uygun olduğuna karar verme	Beş öğrencinin matematik dersi sınav puanları 49, 45, 55, 53 ve 58'dir. Sınava girmeyen bir öğrenci daha sonradan sınava girip 98 puan almıştır. İlk durumda ve ikinci durumda sınıfın başarı ortalaması hakkında ne söylersiniz?

Problemin sunumunda kullanılan temsil biçimleri, "sözel temsil", "görsel temsil" ve "çoklu temsil" şeklinde üç kategoride, problemin çözümünde kullanılan temsil biçimleri ise Şekil 4'de verildiği üzere "sözel", "resim", "manipulatif" ve "sembol" olarak dört kategoride değerlendirilmiştir. Problemlerin çözümünde kullanılan çözüm stratejileri ise "denge merkezi", "adil paylaşım", "algoritma", "tahmin-kontrol" olarak sınıflandırılmıştır.

2.3. Verilerin Toplanması ve Analizi

Ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının öğretiminin hangi sınıf düzeylerinde öğretiminin yapıldığı belirlenmiş ardından verilerin toplanıp analizinin gerçekleştirileceği 6. ve 7. sınıf Matematik ders kitapları, Milli Eğitim Bakanlığı'nın resmi sitelerinden biri olarak kullanılan http://www.eba.gov.tr/ekitap?&channel=334 sitesinden temin edilmiştir. Çalışmaya dahil edilen ders kitapları Türkiye'de 2019-2020 eğitim öğretim yılında kullanılan ders kitaplarıdır. Ders kitaplarındaki çözümlü problemler iki araştırmacı tarafından birlikte A4 kağıdına geçirilmiş, ardından iki araştırmacı birbirinden bağımsız bir şekilde her bir çözümlü problemin tipini, problemin hangi temsil biçimi kullanılarak sorulduğunu, problemin çözümünde hangi çözüm stratejisinin ve temsil biçiminin kullanıldığını kodlamışlardır. Problemin tipi belirlenirken Cai ve arkadaşları'nın (2002) yaptıkları sınıflandırmadan yararlanılmıştır. Problemin sunumunda kullanılan temsil biçimi "sözel temsil", "görsel temsil", ve "çoklu temsil" şeklinde, problemin çözümünde kullanılan temsil biçimi ise "sözel", "resim", "manipulatif model" ve "sembol" biçiminde kodlanmıştır. Problemlerin çözümünde başvurulan çözüm stratejileri "denge merkezi", "adil paylaşım", "algoritma", "tahmin-kontrol" olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan kodlamalar sonucu araştırmacılar bir araya gelerek yaptıkları kodlamaları karşılaştırmış, farklılık oluşturan kodlar tartışılarak ve farklı bir araştırmacının görüşünden yararlanılarak yapılan kodlama ile ilgili nihai karar verilmiştir. Bulguların sunumunda her bir koda ilişkin frekans değerleri verilmiş ve bulgular ders kitaplarından doğrudan alıntılar sunularak desteklenmiştir.

2.4. Çalışmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Matematik ders kitapları, Milli Eğitim Bakanlığı'nın resmi sitelerinden biri olarak kullanılan http://www.eba.gov.tr/ekitap?&channel=334 sitesinden temin edilmiştir. Çalışmaya dâhil edilen ders kitapları Türkiye'de 2019-2020 eğitim öğretim yılında kullanılan ders kitaplarıdır. Bu açıdan elde edilen veriler güncelliğini korumaktadır. Analizler matematik eğitimcisi iki farklı akademisyen tarafından yapılmış olup, yapılan kodlamalar sonucu araştırmacılar bir araya gelerek yaptıkları kodlamaları karşılaştırmış, farklılık oluşturan kodlar tartışılarak ve farklı bir araştırmacının görüşünden yararlanılarak yapılan kodlama ile ilgili nihai karar verilmiştir. Yapılan oturumlar sonucu, araştırmacılar tarafından yapılan kodlama da fikir birliği sağlanmıştır. Ayrıca bulgular ders kitaplarından doğrudan alıntılar sunularak desteklenmiştir.

3. Bulgular

3.1. Yatay Analiz

3.1.1. Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramı ile ilgili kazanımlar ve kazanımlar için ayrılan süre

Türk ders kitaplarında istatistik kavramlarından biri olan aritmetik ortalama kavramı ile ilgili kazanımlar altıncı ve yedinci sınıf seviyelerinde yer almaktadır. Altıncı sınıf seviyesinde dördüncü ünite içerisinde veri analizi kısmında üç adet kazanım vardır. Bu kazanımlar için verilen süre altı ders saatidir. Bu kazanımlardan ikisi aritmetik ortalama kavramı ile ilgilidir ("Bir veri grubuna ait aritmetik ortalamayı hesaplar ve yorumlar.", "İki gruba ait verileri karşılaştırmada ve yorumlamada aritmetik ortalama ve açıklığı kullanır.") yer almaktadır. Yedinci sınıf seviyesinde altıncı ünite içerisinde veri analizi kısmında dört adet kazanım bulunmaktadır. Bu kazanımlar için verilen süre onbeş ders saatidir. Bu kazanımlardan biri aritmetik ortalama kavramı ile ilgilidir ("bir veri grubuna ait ortalama, ortanca ve tepe değeri bulur ve yorumlar") vardır. Dört kazanım için verilen süre on beş ders saatidir (MEB, 2018, s. 23, 24, 66, 72).

3.2. Dikey Analiz

3.2.1. Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramı nasıl sunuluyor?

Ders kitaplarında aritmetik ortalama algoritması adil paylaşım anlamı üzerinden oluşturulmaya çalışılmıştır. Örneğin, TR6A kodlu kitapta "Bir hidroelektrik santralde kaynaklara dakikada 300 ton, 180 ton, 240 ton, 120 ton ve 360 ton su gelmektedir. Kaynaklara gelen su 5 türbine eşit olarak paylaştırıldığında 1 türbine dakikada kaç ton su geleceğini bulalım." şeklindeki problem üzerinden aritmetik ortalamanın $\frac{tüm\ verilerin\ toplamı}{veri\ sayısı}$ olduğu ifade edilmişken, benzer şekilde TR6B kodlu kitapta "Ömer dede, torunlarının her doğru davranışına karşılık torunlarına belli bir miktar para vermektedir. Torunları aldıkları bu paraları bir kumbarada biriktirmektedirler. Kumbara dolduktan sonra kumbarayı açarlar ve bu parayı mahallelerindeki ihtiyacı olan üç aileye eşit olarak paylaştırırlar. Her aileye eşit olarak paylaştırılan parayı "her bir aileye düşen ortalama para miktarı" şeklinde ifade edebilir miyiz? şeklindeki bir problem durumu üzerinden aritmetik ortalamanın $\frac{tüm\ verilerin\ toplamı}{veri\ sayısı}$ olduğu ifade edilmiştir. Denge ve Adil-paylaşım modelleri aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasında güçlü birer analoji olarak kabul edilmesine karşın, her iki altıncı sınıf ders kitabında bu modellerin ya yeterli ölçüde ya da hiç kullanılmadığı tespit edilmiştir. Ders kitaplarında aritmetik ortalamanın bir veri kümesinin denge merkezi olduğuna ilişkin hiçbir açıklamaya yer verilmemiştir. Buna ek olarak, ders kitaplarında adil paylaşım düşüncesine uygun sadece birer problem durumu verilmiş olmasına karşın, elde edilen değerin yani aritmetik ortalamanın, veri kümesindeki elemanlarla olan ilişkisi ve aritmetik ortalamanın veri kümesini temsil eden bir değer olduğuna ilişkin tartışmalar üzerinde durulmamıştır.

3.2.2. Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama ile ilgili ne tip çözümlü problemlere yer verilmiş ve çözümlü problemler hangi temsil biçiminde sorulmuştur?

Aritmetik ortalama kavramının öğretiminde benimsenen anlayış, ders kitaplarında çözümü yapılmış olan problemlerin tipine, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğuna, problemlerin çözümünde kullanılan stratejiye ve çözümde kullanılan temsil biçimine yansımıştır. Tablo 3'te ders kitaplarında yer alan çözümü yapılmış olan problemlerin tipine ve problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğuna ilişkin bulgular verilmektedir.

Tablo 3. Ders kitaplarında yer alan çözümü yapılmış problemlerin tipi

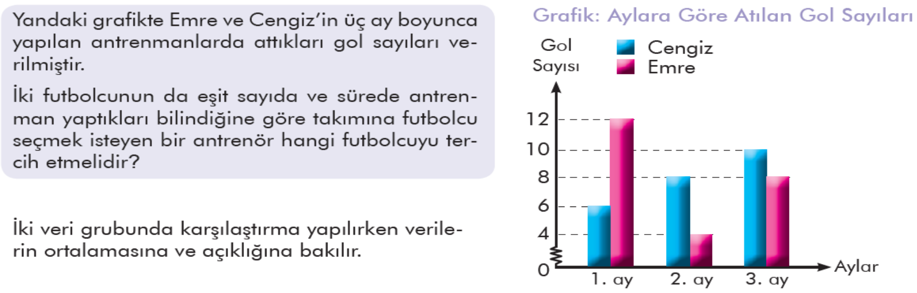
Problem tipi	TR6A f (%)	TR6B f (%)	TR7 f (%)
A1	3	3	2
A2	0	0	0
B1	0	3	0
B2	0	0	0
B3	1	1	0
B4	0	0	0
C1	0	0	0
C2	0	0	0
C3	2	3	0
C4	0	0	2
Problemin Hangi Temsil Biçiminde Sorulduğu			
Sözel form	5	8	4
Görsel form (sütun-çizgi grafiği, birim küpler vb.)	0	0	0
Çoklu (Sözel+Görsel)	1	2	0

TR6A kodlu kitapta 6 adet, TR6B kodlu kitapta 10 adet, TR7 kodlu kitapta 4 adet aritmetik ortalama ile ilgili çözümlü problem yer almaktadır. TR6A kodlu kitapta sadece A1, B3 ve C3 tipindeki problemlere, TR6B kodlu kitapta A1, B1, B3, C3 tipindeki problemlere, TR7 kodlu kitapta ise sadece A1 ve C4 tipindeki problemlere (Bkz. Tablo 2) yer verilmiştir. Dikkat edilirse her üç kitapta da A2, B2, B4, C1, C2 tipindeki çözümlü problem yer almamaktadır. B1 tipindeki problemler ise sadece TR6B kodlu kitapta bulunmaktadır. A1 ve B1 tipindeki çözümü yapılmış olan problem örnekleri aşağıda verilmiştir.

"2, 4, 6, 8, 10 veri grubunun aritmetik ortalaması nedir?" (A1 tipinde sözel formda sorulmuş bir aritmetik ortalama problemi, TR6A, s.143).

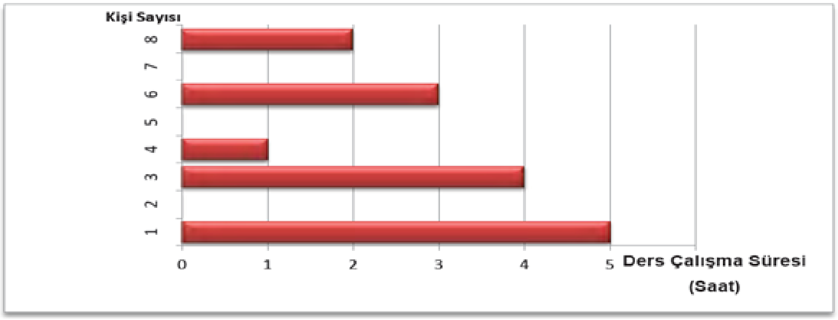
"Zehra, Fen ve Teknoloji dersinin ilk iki sınavından 72 ve 80 puan almıştır. Zehra bu dersin ortalamasının 84 puan olmasını istediğine göre Zehra'nın üçüncü sınavdan kaç puan alması gerektiğini bulunuz" (B1 tipinde sözel formda sorulmuş aritmetik ortalama problemi, TR6B, s. 245).

Ders kitaplarındaki problemlerin çoğunluğu sözel formda sunulmuş olup, çoklu formda sunulmuş olan problemlerde genel ortalamanın (overall mean) bulunması veya ortalamanın açıklıkla birlikte yorumlanması istenmiştir. TR6A'da 1 adet, TR6B'de 2 adet çoklu formda sorulmuş problem bulunmaktadır. TR6A'da çoklu formda sorulmuş olan problemde sütun grafiği verilerek öğrencilerin aritmetik ortalamayı açıklıkla birlikte yorumlamaları istenmiştir (Şekil 5). TR6B'de benzer şekilde 2 adet çoklu formda sorulmuş olan problemden ilkinde sütun grafiği verilerek öğrencilerin aritmetik ortalamayı açıklıkla birlikte yorumlamaları diğer problemde sütun grafiği verilerek öğrencilerden genel ortalamayı bulmaları istenmiştir (Şekil 6). Bu problem yapılarına örnekler aşağıda verilmiştir.



Şekil 5. C3 tipinde çoklu formda sorulmuş bir aritmetik ortalama problemi, TR6A, s. 150.

Bir sınıftaki öğrencilerin günlük ders çalışma süreleri aşağıdaki grafikte verilmiştir. Bu sınıftaki öğrencilerin bir günde ortalama ders çalışma süresinin kaç saat olduğunu bulalım.



Şekil 6. B3 tipinde çoklu formda sorulmuş bir aritmetik ortalama problemi, TR6B, s. 244.

TR7 kodlu kitapta A1 ve C4 tipinde problemlere yer verilmiş olup çoklu formda sorulmuş problem bulunmamaktadır. Ders kitabında yer alan problem yapılarına ilişkin bir örnek Şekil 7'de verilmiştir.

Bir öğrencinin 1 hafta boyunca her gün çözdüğü soru sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Öğrencinin Bir Hafta Boyunca Çözdüğü Soru Sayısı

Günler	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Soru sayısı	5	14	15	80	5	5	16

Buna göre bu öğrencinin bir haftada çözdüğü soru sayısının aritmetik ortalaması, tepe değeri ve ortancasını bulalım. Bilgilerden hangisinin bize bu öğrencinin performansı hakkında etkili yorum yapabilme olanağı sağlayacağını bulalım.

Şekil 7. C4 tipinde sözel formda sorulmuş bir aritmetik ortalama problemi, TR7, s. 267.

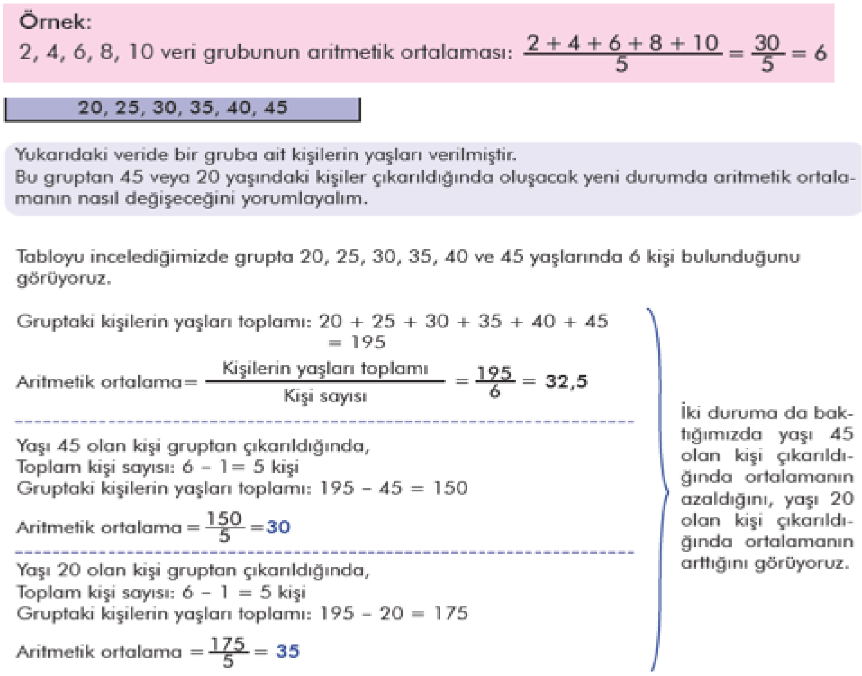
3.2.3. Türk ders kitaplarında problemlerin çözümünde hangi çözüm stratejilerine yer verilmiş ve çözümde hangi temsil biçimi/biçimleri kullanılmıştır?

Ders kitaplarındaki aritmetik ortalama ile ilgili problemlerin tipinin tespiti kadar bu problemlerin çözümünde başvurulan stratejilerin tespit edilmesi de önemlidir. Çünkü algoritma ve tahmin-kontrol stratejileriyle yapılan matematiksel çözümler aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşıldığını garanti etmemektedir. Tablo 4'de ders kitaplarında problemlerin çözümünde kullanılan stratejiye ve çözümde kullanılan temsil biçimine ilişkin bulgular sunulmuştur.

Tablo 4. Ders kitaplarında aritmetik ortalama ile ilgili problemlerin çözümünde kullanılan stratejiler ve temsil biçimi

	Ders Kitapları		
Çözüm Stratejisi	TR6A	TR6B	TR7
Denge Merkezi	0	0	0
Adil Paylaşım	1	0	0
Tahmin Kontrol	0	0	0
Algoritma	5	10	4
Sözel	0	0	0
Resim	0	0	0
Manipülatif	0	0	0
Sembol (aritmetik veya cebirsel)	6	10	4

Ders kitaplarında yer verilen aritmetik ortalama problemleri sadece ekle-böl algoritması kullanılarak çözülmüştür. Denge merkezi, adil paylaşım, tahmin-kontrol stratejileri ile yapılan herhangi bir çözüm ders kitaplarında yer almamaktadır. Bunun yanında çözümlerde farklı temsil biçimlerinden yararlanılmamış olup sadece aritmetik formda çözümler yapılmıştır. Şekil 8 ve Şekil 9'da sırasıyla TR6A ve TR6B kodlu kitaplarda yer alan çözümlü problemler sunulmuştur. Şekil 8'de verilmiş olan problemlerden ilkinde, beş sayıdan oluşan bir veri kümesinin aritmetik ortalamasının ne olduğu, diğer soruda ise altı adet sayıdan oluşan bir veri kümesi verilmiş ve bu veri kümesinden herhangi bir veri çıkarıldığında aritmetik ortalamanın ilk duruma göre nasıl değişeceği sorulmuştur. Şekil 9'da ise veri kümesindeki verilmeyen elemanın bulunmasına yönelik iki problem yer almaktadır.



Şekil 8. TR6A kodlu kitaptaki A1 tipindeki iki problemin sözel formda algoritma yardımıyla çözümü

Şekil 8 ve Şekil 9'da verilmiş olan problemlerin tümünün çözümü aritmetik ortalama algoritması kullanılarak yapılmış, farklı bir çözüm stratejisine başvurulmamıştır. Her iki ders kitabında da aritmetik ortalama kavramına giriş yapılırken adil paylaşım düşüncesine kısa bir şekilde değinilmiş olsa da, bulunan değerin veri kümesinin elemanları ile olan ilişkisi üzerine herhangi bir içeriğe yer verilmemiştir. Sonuç olarak ders kitaplarında yer alan çözümlü problemler ve problemlerin çözümünde kullanılan temsil biçimleri ve çözüm stratejileri, öğrencileri algoritma kullanmaya sevk etmekte öğrencilerin, aritmetik ortalamanın veri kümesindeki elemanlarla olan ilişkisini ve aritmetik ortalamayı bir veri kümesini temsil eden bir değer olarak yorumlanmalarına ve ağırlıklı ortalamayı hesaplamalarına fırsat sunmamaktadır.

Dört arkadaşın yaş ortalaması 14'tür. Bu arkadaşlardan üçünün yaşları 12, 15 ve 14 olduğun göre dördüncü kişinin yaşını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \text{Yaşlarının Ortalaması} = \frac{\text{Yaşlarının Toplamı}}{\text{Kişi Sayısı}}$$

Bu durumda yaşlarının ortalamasının 14 ve kişi sayısının 4 olduğunu biliyoruz.

O hâlde dört arkadaşın yaşlarının toplamı $14 \cdot 4 = 56$ 'dır.

Üç arkadaşın yaşlarının toplamı ise $12 + 15 + 14 = 41$'dir.

Dördüncü kişinin yaşı ise $56 - 41 = 15$ olarak bulunur.

Zehra, Fen ve Teknoloji dersinin ilk iki sınavından 72 ve 80 puan almıştır. Zehra bu dersin ortalamasının 84 puan olmasını istediğine göre Zehra'nın üçüncü sınavdan kaç puan alması gerektiğini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{\text{Üç Sınavın Toplam Puanı}}{\text{Sınıf Sayısı}}$$

Üç sınavın toplam puanı $84 \cdot 3 = 252$'dir.
Zehra'nın ilk iki sınavdan aldığı puanların toplamı $72 + 80 = 152$'dir.
Bu durumda üçüncü sınavdan alması gereken puan $252 - 152 = 100$'dür.

Şekil 9. TR6B kodlu kitaptaki B1 tipindeki iki problemin sözel formda algoritma yardımıyla çözüm

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada veri işleme öğrenme alanının önemli kavramlarından biri olan aritmetik ortalama kavramının Türk ders kitaplarında nasıl sunulduğu ve aritmetik ortalama ile ilgili ne tip problemlere yer verildiği, problemlerin hangi temsil biçiminde sorulduğu, problemlerin çözümlerinde hangi temsil biçimleri ve çözüm stratejilerinin kullanıldığı incelenmiştir. Denge ve adil-paylaşım modelleri aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasında güçlü birer analoji olarak kabul edilmesine karşın, her iki altıncı sınıf ders kitabında bu modellerin ya yeterli ölçüde ya da hiç kullanılmadığı tespit edilmiştir. Örneğin, ders kitaplarında aritmetik ortalamanın bir veri kümesinin denge merkezi olduğuna ilişkin hiçbir açıklamaya yer verilmemiştir. Buna ek olarak, ders kitaplarında adil paylaşım üzerine birer problem durumu verilmiş olmasına karşın, aritmetik ortalamanın bir veri kümesindeki elemanlarla olan ilişkisi ve aritmetik ortalamanın veri kümesini temsil eden bir değer olduğuna ilişkin tartışmalara yer verilmemiştir. Aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşıldığının göstergelerinden biri ve belki de en önemlisi, aritmetik ortalamanın bir veri kümesini temsil eden bir değer olarak yorumlanmasıdır (Leavy, 2001; Mokros ve Russell, 1995). İstatistiksel bir kavram olarak aritmetik ortalamanın, bir veri kümesi için ne ifade ettiği adil paylaşım ve denge modelleri kullanılarak öğretilebilir (Cai ve Moyer, 1995; Hardiman ve ark., 1984; Uccellini, 1996; Van de Walle ve ark., 2013). Hardiman ve arkadaşlarının (1984) yaptıkları deneysel çalışma denge modeli ile yapılan öğretimin öğrencilerin ağırlıklandırılmış ortalamayı daha iyi anlamalarını sağladığını göstermiştir. Cai ve Moyer (1995) çalışmalarında adil paylaşım düşüncesinin öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili problem çözümlerindeki performanslarını olumlu yönde etkilediğini tespit etmişlerdir. Bu açıdan Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının bir veri kümesinin elemanlarıyla ilişkisinin ve veri kümesi için ne ifade ettiğinin öğretiminde, adil paylaşım ve denge merkezi düşüncesinden yararlanılabilir.

Ders kitaplarında aritmetik ortalama ile ilgili çözümü yapılmış olan problemlerin tipi incelendiğinde, her üç kitapta da B2, B4, C1, C2 tipinde olan hiçbir çözümlü problemin bulunmadığı dikkat çekmektedir. Öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını derinlemesine öğrenmelerinde B ve C tipindeki problemlerin ders kitaplarında bulunması önemli görülmektedir (Bremigan, 2003; Leavy ve O'Loughlin, 2006; Russell ve Mokros, 1996). B2 tipindeki bir problem öğrencileri aritmetik ortalamanın denge merkezi anlamını düşünmeye teşvik edecektir (Russell ve Mokros, 1996). Aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşıldığının göstergelerinden biri, ağırlıklı ortalama problemlerin çözülebilmesidir (Mevarech, 1983; Pollatsek ve ark.,1981). Bu açıdan ders kitaplarına B4 tipindeki problemler eklenmelidir. Bremigan (2003), aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşılmasının, problem çözümlerinde aritmetik ortalamanın yedi özelliğinin (Strauss ve Bichler, 1988) bilinmesine bağlı olduğunu ifade etmiştir. Bu özelliklerden biri, aritmetik ortalamanın her zaman bir doğal sayı değerine eşit olamayabileceğidir. Öğrenciler aritmetik ortalamanın veri kümesindeki elemanlarla ilişkisini ve veri kümesini temsil eden bir değer olduğunu öğrendiklerinde bu durumu normal karşılayacaklardır. Bu yüzden ders kitaplarında C1 ve C2 tipindeki problemlere de yer verilmelidir (Bremigan, 2003; Cai ve ark., 2002; Leavy ve O'Loughlin, 2006; Watson, 2007). Çalışmadan elde edilen sonuçların aksine, Leavy ve O'Loughlin (2006) aritmetik ortalama kavramının kavramsal olarak anlaşılıp anlaşılmadığının tespitinde, eşit elemana sahip olmayan iki veri kümesinin karşılaştırılmasını (C1), ağırlıklandırılmış ortalamanın bulunmasını (B4), aritmetik ortalaması verilen yedi elemanlı bir veri setinin oluşturulmasını (B2) gerektiren problemler kullanmışlardır. Uçar ve Akdoğdan (2009) ve Enisoğlu (2014) çalışmalarında farklı tipte aritmetik ortalama problemlerinden yararlanmışlardır (Örneğin; Bir izci kampında farklı yaşlarda 8 öğrenci vardır. Bu gruptaki öğrencilerin yaşlarının ortalaması 15'tir. Verilen bu bilgilere göre bu öğrencilerin yaşlarının kaç olabileceğini gösteren sütun grafiğini aşağıdaki alana çizerek örnek bir veri grubu oluşturunuz; B2 tipinde").

Ders kitaplarındaki problemlerin çoğunluğu sözel formda sunulmuş olup, çoklu formda sunulmuş olan problemlerde genel ortalamanın (overall mean) bulunması veya ortalamanın açıklıkla birlikte yorumlanması istenmiştir. TR6A'da 1 adet, TR6B'de 2 adet çoklu formda sorulmuş problem bulunmaktadır. TR7 kodlu kitapta ise çoklu formda sorulmuş problem bulunmamaktadır. Çalışmadan elde edilen sonuçların aksine, alan yazında farklı temsil biçimlerinde sunulmuş problemlerin kullanıldığı çalışmalar yer almaktadır (Uçar ve Akdoğan, 2009; Enisoğlu, 2014; Koparan ve Güven, 2014). Problemlerin hangi temsil biçiminde sunulduğu öğrencilerin problemi çözerken tercih ettikleri temsil biçimini etkilemektedir. Öğrencilerin kullandıkları temsil biçimleri de seçtikleri çözüm stratejileri ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, ekle-böl stratejisini kullanan öğrenciler çoğunlukla sembolik temsile yönelmişlerdir. Seviyeleri eşitleme stratejisini kullanan öğrenciler ise resim temsiline başvurmuşlardır (Cai ve Moyer, 1995). Yapılmış çalışmalar, Amerika ders kitaplarında, Çin kitaplarına kıyasla görsel formda sunulmuş problemlerin fazla olduğunu bu yüzden Amerikalı öğrencilerin Çinli öğrencilere kıyasla problem çözümlerinde görsel temsili kullanmayı daha çok tercih ettiklerini ortaya koymaktadır (Brenner ve ark., 1999; Cai, 1995). Matematik derslerinde çoğu zaman öğrencilere sembolik formda veya sözel formda sunulmuş bir problem verilerek, öğrencilerden problemi sembolik formda (aritmetik ortalama algoritması) çözmeleri beklenmektedir. Bu durum öğrencileri algoritma kullanmaya yönlendirmekte öğrencilerin kavramsal olarak öğrenmesini garantilememektedir (Cai, 1995; Cai ve Moyer, 1995). Bu açıdan ders kitapları aritmetik ortalama ile ilgili farklı tipte olan ve farklı temsil biçimleri kullanılarak sunulmuş problemler açısından zenginleştirilmelidir.

Ders kitaplarındaki aritmetik ortalama ile ilgili problemlerin tipinin tespiti kadar bu problemlerin çözümünde başvurulan stratejilerin tespit edilmesi de önemlidir. Öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri onların aritmetik ortalama kavramını kavramsal olarak öğrenip öğrenmedikleri hakkında bilgi verebilir (Mokros ve Russell, 1995; Watson ve Moritz, 2000). Çünkü algoritma ve tahmin-kontrol stratejileriyle yapılan matematiksel çözümler aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşıldığını garanti etmez ancak problemlerin çözümünde denge merkezi ve adil paylaşım düşüncesi aritmetik ortalamanın kavramsal olarak anlaşıldığına işaret eder (Hardiman ve ark., 1984; Marnich, 2008; Uccellini, 1996). Ders kitaplarında yer verilen aritmetik ortalama problemleri sadece ekle-böl algoritması kullanılarak çözülmüştür. Denge merkezi, adil paylaşım, tahmin-kontrol stratejileri ile yapılan herhangi bir çözüm ders kitaplarında yer almamaktadır. Bunun yanında çözümlerde farklı temsil biçimlerinden yararlanılmamış olup sadece aritmetik formda çözümler yapılmıştır. Ders kitaplarındaki içeriğe paralel olarak, yapılan çalışmalarda, öğrencilerin aritmetik ortalama ile ilgili problem çözümlerinde sıklıkla ekle-böl algoritmasını, algoritmanın altında yatan anlamı bilmeden kullandıkları tespit edilmiştir (Enisoğlu, 2014; Kaynar ve Halat, 2012; Uçar ve Akdoğan, 2009). Çakmak ve Durmuş (2015), çalışmalarında ilköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin istatistik ve olasılık öğrenme alanındaki zorlandıkları kavramları belirlemeye ve bunların nedenlerini saptamaya çalışmışlardır. Yapılan mülakatlarda öğrenciler, aritmetik ortalama formülünü unuttuklarına temas etmişlerdir. Ünlü (2008), öğrencilerin matematik dersindeki başarısızlığının en önemli sebeplerinden birinin, formüllerin ezberlenmesi ve ezberlenen bilgilerin daha sonra hatırlanamaması olduğunu ifade etmiştir. Bu açıdan ders kitaplarında aritmetik ortalama problemlerinin çözümünde farklı çözüm stratejilerine yer verilmelidir. Öğrenciler farklı çözüm stratejilerini kullanma konusunda teşvik edilmelidirler. Problemlerin farklı stratejiler ve farklı temsil biçimleriyle çözülmesi öğrencilerin ilgili kavramı derinlemesine öğrenmesine fırsat sunar. Nitekim, aritmetik ortalama kavramını, kavramsal olarak öğrenmiş olan öğrenciler çözümlerinde sık sık çoklu temsilleri kullanmaya yönelmektedirler. Bu açıdan ders kitaplarında aritmetik ortalama problemlerinin çözümlerinde farklı çözüm stratejilerinden ve çoklu temsil biçimlerinden yararlanılmalıdır.

5. Öneriler

Türk ders kitaplarında adil paylaşım düşüncesinden kısaca bahsedilmiş olmasına karşın elde edilen sayının veri kümesinin elemanlarıyla ilişkisinden ve veri kümesi için neyi ifade ettiğinden bahsedilmemiş olması ve denge merkezi düşüncesine hiç temas edilmemiş olması öğrencileri, aritmetik ortalama kavramını yüzeysel şekilde öğrenmeye sevk edebilir. Ders kitaplarında yer verilen problemler, problemlerin çözümünde kullanılan stratejiler ve temsil biçimi öğrencileri sadece algoritma odaklı düşünmeye ve hareket etmeye ve çözümlerini sembolik formda yapmaya yönlendirebilir. Bu durum uluslararası sınavlarda öğrencilerin kavramsal anlama düzeylerini ölçen aritmetik ortalama sorularını çözerken zorlanmalarına ve hata yapmalarına sebebiyet verebilir.

Bu açıdan Türk ders kitaplarında aritmetik ortalama kavramının bir veri kümesinin elemanlarıyla ilişkisi ve veri kümesi için ne ifade ettiği öğretilirken, adil paylaşım ve denge merkezi düşüncesinden yararlanılmalı, farklı tipte olan ve farklı temsil biçimleri kullanılarak sunulmuş problemler açısından zenginleştirilmelidir. Ders kitaplarında aritmetik ortalama problemlerinin çözümlerinde farklı çözüm stratejilerinden ve çoklu temsil biçimlerinden yararlanılmalıdır. İlerleyen zamanlarda matematik öğretmenlerinin aritmetik ortalama kavramını öğretirken ders kitaplarından ne ölçüde yararlandıkları, öğrencilerin aritmetik ortalama kavramından ne anladıkları, aritmetik ortalama problemlerini çözerken hangi temsil biçimi/biçimlerinden yararlandıkları ve hangi çözüm stratejilerine başvurdukları araştırılabilir. Bu sayede öğrencilerin aritmetik ortalama kavramını derin bir şekilde öğrenip öğrenmedikleri ortaya konulabilir. Ortaya çıkan sonuçlar, ders kitaplarının öğrencilerin performansları üzerindeki etkisini daha güçlü bir şekilde görmemize fırsat sunabilir.

The Learning Opportunities Presented by Mathematics Coursebooks Used in Middle Schools in Turkey on the Concept of Arithmetic Mean

1. Introduction

Comparative studies such as Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) and Programme for International Student Assessment (PISA) are among the most significant indicators that demonstrate the successes of countries in Mathematics. In 2015, Turkey demonstrated low performance on the learning domain of data and probability in TIMSS by getting 467 points (Mullis, Martin, Foy, & Hooper, 2016). While 48% of the Turkish students accurately answered a question on TIMSS 2011, which provided the number of staff working at five restaurants and identified the mean number of staff working at these restaurants, only 25% of Turkish students were able to accurately answer another question that asked how the arithmetic mean would change when the number of staff at one of these five restaurants increased from 30 to 50 at the application level (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012). A question on TIMSS 2015 said a student named Ahmet got 9, 7, 8, and 8 on his first four tests in mathematics; however, in the survey, when students were asked to evaluate the possibility of Ahmet wanting his mean score on five tests to be 9 after taking the final test (maximum score is 10), only 35% of Turkish students accurately answered (Mullis et al., 2016). These results demonstrated that the achievement level of Turkish students on the arithmetic mean problems at the application and evaluation levels is lesser than that at the knowledge level. The low performance of Turkish students can be attributed to multiple reasons. Investigating how the concept of arithmetic mean is presented in coursebooks, what type of problems and solution strategies are covered in terms of arithmetic mean, and which representation form is used in asking and solving problems can help explain students' performances in mathematics. This is because according to TIMSS, coursebooks are the primary source teachers refer to when determining how to present a subject. Moreover, they influence what and how teachers teach and the kind of assignments and activities students are exposed to (Son & Senk, 2010; Stein, Remillard, & Smith, 2007). The way subjects are presented in coursebooks is significant in that they trigger pedagogical approaches and various opportunities required for students to learn. Coursebooks help to determine the curricular objectives stated in the curriculum guide (i.e., the target curriculum). Furthermore, they determine what to teach and what to learn in the classroom (i.e., the applied curriculum); therefore, coursebooks serve as a bridge between the "the target curriculum" and "the applied curriculum." The analysis of coursebooks provides a clearer picture of what to teach and learn in the classroom compared with the target curriculum (Flanders, 1994). This study investigated how the concept of arithmetic mean was presented in Turkish coursebooks, what type of problems related to the arithmetic mean was covered, the type of representation form through which the problems were presented, and the type of representation forms and solving strategies used for solving problems.

1.1. Purpose and Significance of the Study

Arithmetic mean is a significant concept that we encounter in daily life and statistics. The arithmetic mean concept is used in daily life in various fields such as meteorology, medicine, and agriculture. Most students encounter this concept in their daily lives before receiving formal training on statistics (such as those in height, age, and score means) (Chatzivasileiou, Michalis, & Tsaliki, 2010; Zazkis, 2013). Data analysis and probability are one of the five domains of the Mathematics Teaching Program (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). In 2018, the Mathematics Teaching Program was revised, and similar to the 2013 Teaching Program, the teaching of statistical concepts was included in every stage of the Mathematics Teaching Program (Ministy of National Education [MoNE], 2018, p. 66, 72).

Although the arithmetic mean is a significant concept that we encounter in the daily life and in the domain of learning statistics, previous studies demonstrated that students preferred the arithmetic mean algorithm (solution in the algebraic or arithmetic form) for solving questions on the arithmetic mean (Cai, 1998, 2000; Enisoğlu, 2014; Mokros & Russell, 1995; Uçar & Akdoğan, 2009). The studies indicated that although students know the arithmetic mean algorithm, they made mistakes because of the inaccurate use of the algorithm (Cai, 1998, 2000; Mevarech, 1983; Pollatsek, Lima, & Well, 1981; Watson & Moritz, 2000). The foundation of the difficulties that students have with arithmetic mean lies in the implementation of algorithm-oriented teaching before enabling them to develop a conceptual understanding of this concept (Cai, 1998, 2000). A weak conceptual understanding might manifest itself in various forms. The mistakes students make for calculating the weighted mean (Hardiman, Well, & Pollatsek, 1984; Mevarech, 1983; Pollatsek et al., 1981), not knowing the characteristics of arithmetic mean (Gattuso & Mary, 1998; Goodchild, 1988; Leon & Zawojewski, 1991; Strauss & Bichler, 1988), and having difficulty in identifying an unknown element in the data set whose mean is known (Cai, 1995,1998) are evidence for this situation. Mokros and Russell (1995) reported that students in their study preferred the arithmetic mean algorithm and ignored the arithmetic mean's role in representing the data set. In Strauss and Bichler (1988, p. 72, 76) and Zawojewski (1991, p. 304), students had difficulty in comprehending the three characteristics of arithmetic mean: the sum of deviations from the arithmetic mean is zero., zero should be noted in calculating the arithmetic mean., and arithmetic mean is a value that represents the data set.

The results were similar in studies conducted in Turkey (Enisoğlu, 2014; Uçar & Akdoğan, 2009). In Uçar and Akdoğan (2009), six students in each of the grades 6, 7, and 8 (making 18 in total) were given five problems on the concept of arithmetic mean, and then they were asked to solve them. The students mostly preferred the add–divide algorithm when solving the problem. Half of the students did not evaluate the concept of the mean as a value that represented a data set. The researchers, based on the results, argued that the students were exposed to algorithm-oriented teaching and could not conceptually learn arithmetic mean. In a study on students in grade 8, Kaynar and Halat (2012) reported that the students' level of knowledge was remarkably insufficient in calculating the measures of central trend and dispersion in all domains (such as arithmetic mean and mode) except for the data range. Moreover, the students associated mean with arithmetic mean and applied the arithmetic mean algorithm for solving problems. Enisoğlu (2014) reported six problems related to the concepts of arithmetic mean, mode, and median to 233 students in grade 7 and asked them to solve the problems in writing. The students in a study, such as Uçar and Akdoğan (2009), mostly preferred the add–divide algorithm when solving problems. It was reported that the most common mistake made by students in solving problems was the inaccurate use of the mean algorithm. The second most common mistake made by the participants was selecting smaller or bigger numbers. The students who made this mistake chose all data either smaller or bigger than the arithmetic mean when creating a data set appropriate for the arithmetic mean. In a question that asked what the interpretation would be if we had known none of the data but the arithmetic mean of this data set, some students made a mistake of wrongly using the arithmetic mean algorithm and reported a wrong value and made wrong comments based on this value. In a question that asked how the arithmetic mean would change when a value is removed from a data set, most participants said the arithmetic mean decreases. In another question that asked them to compare two data sets presented in a column chart, some participants made the comparison based on one value in the data sets. Moreover, some students compared the data sets based on the median and made the wrong decision. In the studies of Koparan and Güven (2014), some students knew measures of central tendency and dispersion but made erroneous applications. In addition to using the wrong data, students did not have difficulty in identifying the data range. Researchers emphasized that in training individuals with statistical literacy, the focus should be on conceptual learning rather than procedural learning and on student-centered contemporary approaches rather than conventional approaches. According to the results from Çakmak and Durmuş (2015), the mistakes in arithmetic mean are a result of the deficiencies in the four operations and problems such as not having sufficient knowledge of calculating the arithmetic mean and not being able to perform decimal division with numbers that are not exactly divisible. Furthermore, a student that accurately answered a routine arithmetic mean question was not able to show the same success when dealing with a non-routine problem. Answers given by rote using a formula they had previously memorized do not work in interpretive questions that require an inverse operation.

In summary, several studies on the international and national scale demonstrated that Turkish students have difficulty related to the concept of arithmetic mean and are not familiar with conceptual understanding. The Mathematics Teaching Program, which started to be used after being revised in 2018, focuses on the necessity of understanding mathematical concepts in depth for students among its specific objectives (MoNE, 2018, p. 11). The fact that Turkish students had a low performance in the learning domain of data and probability and the focus on the necessity of understanding mathematical concepts in-depth require the investigation of coursebooks, which are the primary sources teachers benefit from when determining how to present a subject. In this regard, this study investigated how the concept of arithmetic mean, which is an essential concept in the learning domain of data, was presented in Turkish coursebooks, what types of problems related to the arithmetic mean were covered, the types of representation forms through which the problems were presented, and the types of representation forms and solving strategies used in solving the problems. In addition to contributing to curriculum developers in improving the coursebooks, this study will help predict the reasons for the low performance of Turkish students in problems on the arithmetic mean. Based on these considerations, the problems of the study can be listed as follows:

- How is the concept of arithmetic mean presented in Turkish coursebooks?
- What types of problems and solutions regarding arithmetic mean were included in Turkish coursebooks and which representation forms were used in the problems?
- What solution strategies were included in the solution of the problems in Turkish coursebooks, and what representation form/forms were used in the solution?

The next section will present what it means to procedurally and conceptually understand the concept of arithmetic mean, the types of arithmetic mean problems, and the representation forms and solution strategies that can be used in the solution of problems.

1.2. Understanding the Concept of Arithmetic Mean: Procedural and Conceptual

Hiebert and Lefevre (1986) reported two types of procedural knowledge. The first type of procedural knowledge includes the awareness of syntactic rules to be familiar with the symbols that represent mathematical ideas and write the symbols in an acceptable format. The second type of procedural knowledge includes the procedures, algorithms, and rules used for solving mathematical problems. For example, while the expression $4 + 2x = 10$ is an acceptable representation, the expression $4 += x2 - 10$ is an unacceptable representation. This knowledge is the first type of procedural knowledge; knowing algorithms or rules to solve the equation of 4+2x=10 is the second type of procedural knowledge. When this view is applied to the concept of arithmetic mean, a student who knows that the representation of arithmetic mean is $\bar{X}$ will have demonstrated the first type of procedural knowledge. A student who uses the add–divide algorithm to determine the arithmetic mean in a data set has the second type of procedural knowledge.

The conceptual understanding of arithmetic mean requires recognizing the context where the arithmetic mean has an appropriate measure of central tendency (Watson & Moritz, 2000), solving the weighted mean problems (Mevarech, 1983; Pollatsek et al., 1981), interpreting that arithmetic mean as a value that represents a data set (Leavy, 2001; Mokros & Russell, 1995), and possessing the visual and kinesthetic understandings of arithmetic mean (Cai, 2000; Ginat & Wolfson, 2002; Leavy, 2001). For the conceptual understanding of arithmetic mean, balance and fair-share models are considered to be strong analogies (Cai & Moyer, 1995; Hardiman et al., 1984; Uccellini, 1996; Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013). What arithmetic mean, as a statistical concept, means to a data set can be taught using fair share and balance models. An experimental study conducted by Hardiman et al. (1984) demonstrated that teaching through the balance model enabled students to understand weighted mean better. Cai and Moyer (1995) reported that the idea of fair share positively affected students' performance for solving problems related to the arithmetic mean. In this regard, to answer the first problem of the study, it was investigated whether the ideas of balance and fair share were used, and if yes, how they were used when introducing the concept of arithmetic mean in the coursebooks.

1.3. Problem Types and Solution Strategies in the Conceptual Understanding of Arithmetic Mean

This study investigated the types of problems solved in the coursebooks, and which strategy(ies) was used in the solution. Vincent and Stacey (2008) indicated that mathematics coursebooks present similar questions with solutions before presenting the questions that students are expected to solve. Because effective examples with solutions enable students to develop their mathematical understanding more efficiently, they are among the sections that attract students' attention first in mathematics coursebooks. Therefore, students tend to select the examples with solutions that fit with the problem they will work on and benefit from them (Weinberg, Wiesner, Benesh, & Boester, 2012). The difficulties students have regarding the concept of arithmetic mean and the fact that students think of arithmetic mean as a value only reported by the add–divide algorithm report the importance of presenting problems that examine students' procedural and conceptual understanding in a balanced manner in coursebooks. Therefore, this study first identified the types of problems solved in coursebooks.

The literature emphasizes various problems that measure procedural and conceptual knowledge levels related to arithmetic mean and the strategies used for solving these problems. In his study, Cai (2000) provided students with two problem cases to determine their procedural and conceptual understanding levels related to the concept of arithmetic mean. The first problem, which measured students' procedural understanding levels, asked the students to report the arithmetic mean of the four given numbers. The second problem, which measured students' conceptual understanding levels in a visual form (the numbers were modeled by unit cubes), afforded the arithmetic mean of a data set and asked the element that was not included in the data set. In a study that compared the coursebooks in the USA, Taiwan, and China in terms of the concept of arithmetic mean, Cai, Lo, and Watanabe (2002) evaluated arithmetic mean problems under three categories. The problems in the first category are those that require the direct use of the arithmetic mean algorithm, e.g., the number of people living in each of the six apartments in a building is 6, 4, 3, 4, 3, and 4. What is the mean number of people living in these six apartments?. Such types of problems examine students' ability in procedural calculation. The problems in the second category are those that require the flexible use of the algorithm, e.g., if the mean number of people in the eight families living in a building is 4, please show the number of people in each family by drawing a graph. The third category includes problems that require students to use the arithmetic mean in the context of statistics and make appropriate interpretations.

- One of two basketball players will be picked for the National Team: the first player scored 21, 16, 23, 21, 20, 17, 16, and 22 points in the last eight games, while the second player scored 24, 18, 21, 25, 22, and 28 points in the last six games. So, which player do you think the coach should pick for the national team?
- Can the mean number of children in families living in the building be 3.5? Why?
- Five students scored 56, 60, 49, 62, and 54, respectively, in a mathematics test. A student who did not sit the test attained 95. When it is included in the other scores, what will be the difference between the class mean score in the first case and the second case?

As can be seen, these problems in the second and third categories are problems that examine students' higher level understanding above their ability in procedural calculation (Bremigan, 2003; Gfeller, Niess, & Lederman, 1999; Leavy & O'Loughlin, 2006). Leavy and O'Loughlin (2006) used problems that required comparing two data sets that did not have the same number of elements, calculating weighted means, and constructing a data set with seven elements whose arithmetic mean is given for determining whether the concept of arithmetic mean is conceptually understood. Hardiman et al. (1984) and Russell and Mokros (1996) stated that construction problems based on the use of the balance model could reveal whether students conceptually learned the arithmetic mean. The approach that students follow for solving a construction problem such as if the mean number of people living in 8 families in a building is 4, please show the number of people living in each family below and the solution strategies they use can help reveal whether students learned the concept (Figure 1). Cai et al. (2002) placed this problem structure, which was stressed out by Hardiman et al. (1984) and Russell and Mokros (1996), in the second category (the problems that require flexible use of the algorithm).

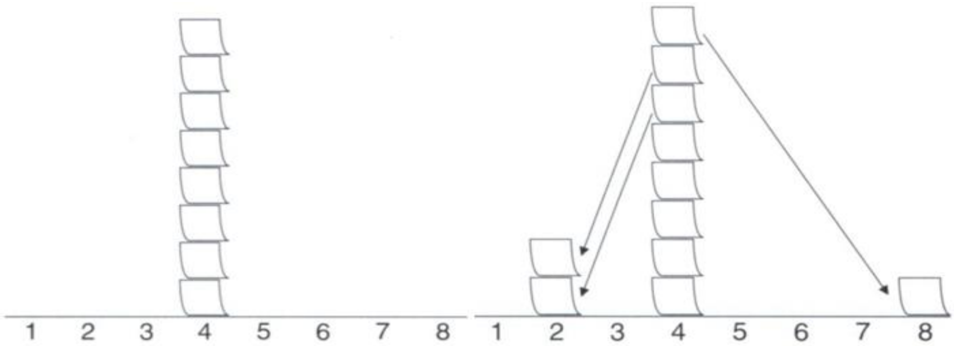
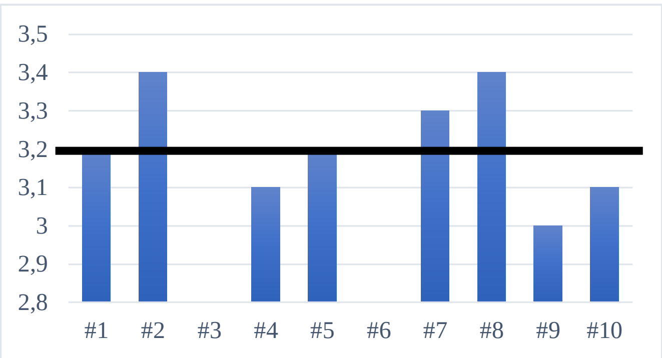


Figure 1. Two different cases where the mean number of people in families living in a building is 4

Bremigan (2003) reported that the conceptual understanding of arithmetic mean depends on knowing the seven properties of arithmetic mean Strauss and Bichler (1988) for the seven properties) for solving the problems and providing examples of problem cases related to these seven properties in her work. Figure 2 shows two problems that examine whether students conceptualized arithmetic mean and were used in previous studies.

Problem 1. A student weighed an object ten times in the chemistry laboratory. The results of the measurements are presented in the below graph. The student lost the results of the third and sixth measurements. If the mean weight of ten measurements, as shown by the bold line in the graph, is calculated as 3.2, what can the values of the third and sixth measurements be? Please show by drawing (Konold & Pollatsek, 2002).



Problem 2. The stacks of blocks in front of four children are given. What should be the number of the blocks in the stack in front of the fifth child such that the arithmetic mean will be 7? (Cai & Moyer, 1995; Uccellini, 1996).

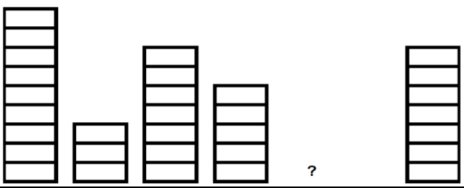


Figure 2. Two problems that examine whether the arithmetic mean is conceptually understood

The problems in Figure 2 are those that require flexible use of the algorithm in the classification by Cai et al. (2002). Note that students are given the arithmetic mean in the problems, and they are expected to identify the elements that are not given in the data set. Students can use various solution strategies when solving the problems given in Figure 2 (Cai, 2000; Marnich, 2008). The solution strategies they use can inform whether students conceptually learned the concept of arithmetic mean (Marnich, 2008; Mokros & Russell, 1995; Watson & Moritz, 2000). The literature discusses four strategies for solving arithmetic mean problems, namely, center of balance, fair share, algorithm-based, and prediction check (Cai, 2000; Marnich, 2008). The students who can solve arithmetic mean problems through center of balance and fair share approaches understand the concept of arithmetic mean conceptually (Hardiman et al., 1984; Marnich, 2008; Uccellini, 1996). However, it is difficult to say for certain that students who use algorithm-based and prediction-check solution strategies understood the concept of arithmetic mean in depth. For example, students who excessively depend on the algorithm encounter an equation with multiple variables such as $\frac{3.2+3.4+x+3.1+3.2+y+3.3+3.4+3.0+3.1}{10} = 3.2$ when solving the first problem. This will make the solution more difficult. Therefore, obtaining the accurate result by accurately using the arithmetic mean formula or a mathematically sound solution attempt should not be seen sufficient to decide that the student demonstrated an in-depth conceptual understanding (Marnich, 2008). Students with conceptual understanding can effectively apply the balance approach or block stacking when solving center of balance problems. Similar to the solution of fair share problems, when solving center of balance problems, the arithmetic mean algorithm can be used. However, as indicated above, this is not conclusive evidence that the student demonstrated considerable understanding of the concept of arithmetic mean (Hardiman et al., 1984; Marnich, 2008; Uccellini, 1996). Figure 3 shows the results of the third and sixth measurements (red columns) using the below distribution when solving the first problem via the fair share approach.

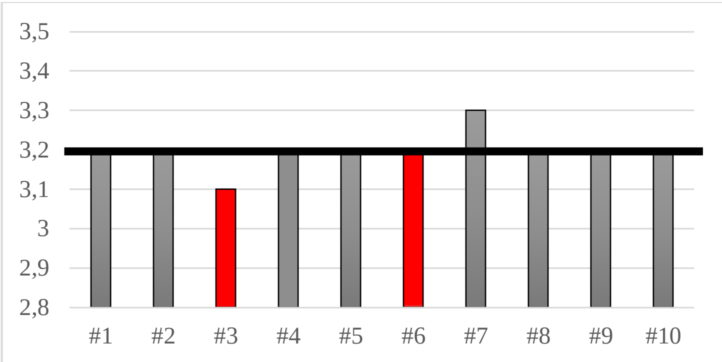


Figure 3. The solution to the first problem through the fair share approach

The first problem can be solved using the center of balance approach. Since the arithmetic mean is 3.2, there is a difference of +0.2 between the first and second measurements. The seventh, eighth, ninth, and tenth measurements balance each other. Moreover, there is a difference of −0.1 between the fourth and fifth measurements, which indicates the overall difference to be of +0.1. In this case, the difference between the third and sixth measurements should be −0.1. If we take the third measurement as 3.2, the sixth measurement should be 3.1. Table 1 shows two problem cases to enrich the examples and illustrates an over-dependance on the algorithm for solving the problem (Marnich, 2008).

Table 1. Two problems that examine whether the arithmetic mean is conceptually understood

Problem 3. The arithmetic mean of three numbers (a, b, c) is x. a is greater than x by 4, and b is greater than x by 5; in this case, what is the relationship between c and x?
Problem 4. You work at a market, and you are asked to attach price tags on nine packages of potato chips. The mean price of chips is 1.38 TL. None of the packages will have a price of 1.38 TL. Moreover, one package should have a price of 1.30 TL, and another package 1.35 TL. Please create the remaining seven price tags.

For example, students who depend on the algorithm when solving question 4 encounter an equation with multiple variables such as $\frac{1.30+1.35+t+u+v+w+x+y+z}{9} = 1.38$. A solution of this type demonstrates that students thought of the concept of arithmetic mean only as an algorithm (Marnich, 2008). However, the fact that students solved the third and fourth problems through the center of balance approach is an indicator that students learned the arithmetic mean as a statistical concept in depth. In the third question, if a is greater than x by 4 and b is greater than x by 5, c should be less than x by 9 such that x is the arithmetic mean (center of balance). The fourth problem can be similarly solved without requiring an algorithm. The abovementioned details highlight the importance of the types of problems with solutions related to the arithmetic mean in coursebooks and the strategies used in their solutions. The classification by Cai et al. (2002) was used for determining the types of problems with solutions presented in the coursebooks related to the arithmetic mean within the scope of the second and third problems in the study. The strategies used in the solution of problems were coded as center of balance, fair share, algorithm-based, and prediction-check.

1.4. The Representations That Can Be Used in the Presentation and Solution of Arithmetic Mean Problems

Representation is one of the mathematical process standards indicated in the policies and standards of school mathematics (NCTM, 2000). The flexible use of multiple representations is an indicator that students learned mathematical concepts, and the relationships between concepts in a meaningful manner (Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999; NCTM, 2000). Representation ability is accepted as a significant process standard in students' understanding of mathematical concepts and the relationships between concepts. In fact, there are earlier studies that revealed the positive effects of teaching via multiple representations on students' conceptual learning (Ainsworth, 2006; Rau, Aleven, & Rummel, 2009; Schnotz & Bannert, 2003).

Cai and Moyer (1995) reported that students applied verbal, symbolic, and picture representations when solving arithmetic mean problems. The representation forms students use are directly linked to the solution strategies they choose. For example, the students who use the add–divide strategy mostly preferred symbolic representation. The students using the levels equalizing strategy applied representation by images. The representation form through which the problems are presented affected the representation form students choose to solve the problem. Previously, studies demonstrated that the number of problems presented in the visual form is higher in number in American coursebooks than Chinese coursebooks; therefore, American students often choose using representation by visuals in solving problems compared to Chinese students (Brenner et al., 1999; Cai, 1995). In mathematics classes, students are usually given a problem in symbolic or verbal form and are expected to solve it in a symbolic form (arithmetic mean algorithm). The students who learned the concept of arithmetic mean conceptually usually apply multiple representations in their solutions. For this purpose, coursebooks should be enriched in terms of problems asked via various representation forms and different solution strategies. Furthermore, using multiple representation forms should be encouraged in the presented solutions. Such enrichment may move students into the conceptual learning process (Duval, 2006) and enable the construction of a vibrant image concept in students (Tall, 1988). For this purpose, within the scope of the second and third problems of the study, the representation forms used in the presentation of the problems with solutions included in the coursebook were evaluated in three categories, namely, verbal representation, visual representation, and multiple representations, and the representation forms used in the solution of a problem were evaluated in four categories: verbal, picture, manipulative, and symbol (Figure 4).

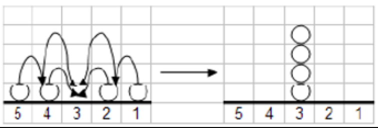
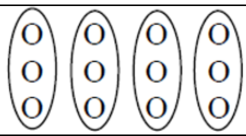
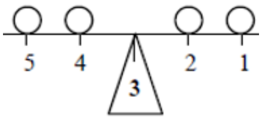
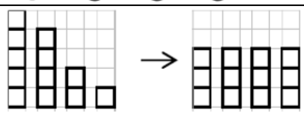
	Center of balance	Fair Share
Verbal	The number of cakes on four plates in a classroom is 5, 4, 2, and 1. What is the number that represents the median or the balance point for the numbers of cakes on the plate?	The number of cakes on four plates in a classroom is 5, 4, 2, and 1. These cakes will be equally shared among four students. Collect the cakes and share them equally in four plates.
Picture		
Manipulative		
Symbol	$(5-x) + (4-x) + (2-x) + (1-x) = 0$ $12 - 4x = 0 \ldots x = 3$	$5+4+2+1=12 \quad \ldots \quad 12 \div 4 = 3$

Figure 4. The representation forms that can be used in solving arithmetic mean problems (Marnich, 2008).

2. Method

The document analysis technique, which is a qualitative analysis method, was adopted in the study, which requires a systematic exploration and interpretation to understand and interpret the data on printed or digital materials (Bowen, 2009). Below is a discussion of the coursebooks used in the study, the data collection and analysis process, and the validity and reliability of the study.

2.1. The Coursebooks Used in the Study

The concept of arithmetic mean is covered in Grades 6 and 7 in Turkey; one grade 6 and one grade 7 mathematics coursebook used in Turkish schools was used in this study. The coursebooks to be used in Turkey are supervised by the Ministry of National Education. The Ministry of National Education in Turkey publishes the list of the coursebooks covered in Turkish schools on http://www.eba.gov.tr/ekitap. The Turkish coursebooks examined within this study were accessed on this website. All coursebooks in this study were the coursebooks used in the 2019–2020 academic year. The grade 6 mathematics coursebook written by Çağlayan, Dağıstan, and Korkmaz (2018) was referred to as TR6A; the grade 6 mathematics course book written by Bektaş, Kahraman, and Temel (2018) was referred to as TR6B; and the grade 7 mathematics coursebook written by Oğan and Öztürk (2019) was referred to as TR7.

2.2. Theoretical Framework

A 2D framework (horizontal and vertical analyses) was used to answer the questions of the study (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Hong & Choi, 2014). The horizontal analysis provides the reader with the big picture regarding the coursebooks, such as how much time is allocated to a topic, what the outcomes related to the topic are, and the grade level the topic is presented at. However, horizontal analysis itself does not provide enough information as to what the authors of the coursebook indeed aimed at. Vertical analysis can ensure a detailed understanding of the mathematical content. This analysis can reveal how the content of the relevant mathematical concept is presented, which representation forms are used, and what kind of problems and solution strategies are included for the related concept.

This study aimed to reveal the extent to which coursebooks helped students in learning the related concept in conceptual terms by investigating the instructional content of the concept of arithmetic mean in the coursebooks, i.e., how the teaching of the concept of arithmetic mean started was primarily identified in the content analysis. In this stage, we sought answers to the following questions:

- Is arithmetic mean presented as a mathematical rule in the course books? If so, how? or
- Is it presented as a value that represents the data set? If so, how?.

In the next stage, problems with solutions in the coursebooks and the representation forms and strategies used in the solution of the problems were investigated. The classification by Cai et al. (2002) was used when investigating the problems. They evaluated arithmetic mean problems in three categories as follows: problems where the arithmetic mean algorithm is directly used, the problems that require flexible use of the arithmetic mean algorithm, and problems that require the use and interpretation of arithmetic mean in the context of statistics (Table 2).

Table 2. The theoretical framework used in the classification of problems (Cai et al., 2002)

Code	The Classification of Problems	Example
A	Direct Use of Algorithm	
A1.	The problems that ask the mean in a data set presented in the form of a table and graph.	The number of people living in six apartments in a building is 6, 4, 3, 4, 3, and 4, respectively. What is the mean number of people living in apartments?
A2	Problems that give the mean and the number of elements and ask the total number	Seven friends will buy a present. If mean contribution of each of them is 50 TL, what is the total amount paid for the present?
B	Flexible Use of the Arithmetic Mean Algorithm	
B1	Problems that give the arithmetic mean and ask what the one or more unknown elements in the data set might be.	The scores one player got in games are 25, 30, 32, 35, 39, and 45. What score should the player get in the 6^{th} game such that the mean score *in all games* is at least 35?
B2	Problems that give the arithmetic mean and ask for identifying the elements in the data set	If the mean number of people in 8 families living in a building is 4, please show the number of people in each family on a graph.
B3	Problems that ask the overall mean in multiple data sets	37 of the students in a group of fifth-graders planted 132 trees, and 35 students in another group of fifth-graders planted 120 trees. What is the mean number of trees planted by fifth graders?
B4	Weighted mean problems	There are 22 boys and 18 girls in a class. If the mean height of boys is 140.5 and the mean height of girls is 142.5, what is the mean height of the class?
C	The use and proper interpretation of the mean in the context of statistics	
C1	The use of the mean in comparing two data sets that do not include the same number of elements	A basketball coach will pick one of two basketball players for the National Team. In the games they played, the first player scored 21, 16, 23, 21, 20, 17, 16, and 22, and the other player scored 24, 18, 21, 25, 22, and 28. Based on this data, which player should the coach pick for the national team?

Table 2 continued

C2	The mean does not have to be equal to one of the elements in the data set	The mean number of goals a football player scored in 10 games is 2.3. Is this number possible? Can the number of goals be a decimal number?
C3	Problems that require the interpretation of the arithmetic mean together with the range to present a more clear picture	Emre and Cengiz are football players. The number of goals these players scored in training is 6, 8, and 10 for Emre and 12, 4, and 8 for Cengiz. If it is known that the number of training sessions the two players attended and the duration they trained are the same, which player should a manager that wants to pick a player for the team prefer?
C4	Deciding on whether the arithmetic mean, mode, or median is more suitable to use when comparing data sets	The scores of five students on the mathematics test are 49, 45, 55, 53, and 58. A student who had not initially sat the test took the test later and got 98. What can be said about the mean score in the class in the first case and the second case?

The representation forms used in the presentation of the problems were evaluated in three categories, namely, verbal representation, visual representation, multiple representation; moreover, the representation forms used in the solution of the problem were evaluated in four categories: verbal, picture, manipulative, and symbol, as shown in Figure 4. The solution strategies used in the solutions of problems, however, were classified as center of balance, fair share, algorithm, and prediction-check.

2.3. Data Collection and Analysis

After identifying the grade levels at which the concept of arithmetic mean was covered, the grade 6 and 7 coursebooks, on which the data collection and analysis was going to be conducted, were accessed on an official website of the Ministry of National Education at http://www.eba.gov.tr/ekitap?&channel=334. The coursebooks included in this study were those used in Turkey in the 2019–2020 academic year. The problems with solutions in the coursebooks were copied on A4 papers by two researchers, and then they separately coded the type of each question with a solution, the representation form through which the problem was asked, and what solution strategy and representation form was used for solving the problem. The classification by Cai et al. (2002) was used when identifying the type of problems. The representation form used for presenting the problems were coded as verbal representation, visual representation, multiple representations, and the representation form used in the solution of a problem as verbal, picture, manipulative model, and "symbol. The solution strategies applied in the solution of problems were classified as center of balance, fair share, algorithm, and "prediction-check. After coding, researchers came together and compared their codes and made the final decision on codes by discussing the different codes and referring to the views of a third researcher. The frequency values for each code were given in the presentations of results, which were supported by direct extracts from the books.

2.4. The Validity and Reliability of the Study

The mathematics coursebooks were accessed on an official website of the Ministry of National Education at http://www.eba.gov.tr/ekitap?&channel=334. The coursebooks included in the study were those used in Turkey in the 2019–2020 academic year. The data collected maintain their currency. The analyses were conducted by two academicians in mathematics education; the researchers came together and compared their codes and made the final decision on codes by discussing them and referring to the views of a third researcher. After the sessions, there was a consensus on the coding performed by researchers. Moreover, the results were supported by direct extracts from the books.

3. Findings

3.1. Horizontal Analysis

3.1.1. The outcomes related to the concept of arithmetic mean in Turkish coursebooks and the time allocated to the outcomes

The results related to the concept of arithmetic mean, which is one of the statistics concepts, in Turkish coursebooks are included in grades 6 and 7. There are three outcomes in the section on data analysis in Unit 4 in grade 6. The time allocated to these outcomes is 6 h. Two of these outcomes are related to the concept of arithmetic mean: calculates and interprets the arithmetic mean in a data set and uses arithmetic mean and range in comparing and interpreting data from two data sets. There are four outcomes in the section on data analysis in Unit 6 in grade 7. The time allocated to these outcomes is 15 h. One of these outcomes, , i.e., can find and interpret the mean, median, and mode values in a data set, is related to the concept of arithmetic mean. The time allocated to the four outcomes is 15 h (MoNE, 2018, p. 23, 24, 66, 72).

3.2. Vertical Analysis

3.2.1. How is the concept of arithmetic mean presented in Turkish coursebooks?

The arithmetic mean is presented via the fair share approach in the coursebooks. For example, while the arithmetic mean in a question in the book coded as TR6A that said, “in a hydroelectricity power plant, the amount of water that comes to the sources in a minute is 300 tons, 180 tons, 240 tons, 120 tons, and 360 tons. When the water that comes to the sources is shared equally among five turbines, how much water comes to a turbine in a minute” is given as $\frac{The\ sum\ of\ all\ data}{The\ number\ of\ data}$. Similarly, in the book coded as TR6B, the arithmetic mean in a problem that said, “Ömer gives a certain amount of money to his grandchildren when they behave nice. His grandchildren save the money in a money box. After the box is full, they open the box and share the money among three needy families in their neighborhood. Is it correct to define this money that was distributed equally to each family as “the mean amount of money each family got?” was indicated as $\frac{The\ sum\ of\ all\ data}{The\ number\ of\ data}$. Although balance and fair-share models are strong analogies for conceptually understanding arithmetic mean, it was reported that the two course books for grade 6 did not cover these models sufficiently or did not cover them at all. There was no explanation in the coursebooks saying that arithmetic mean is the center of balance in a data set. Moreover, although only one problem case in line with the fair share approach was presented, the relationship between the reported value, that is the arithmetic mean and the elements in the data set and the discussions concerning arithmetic mean as a value that represents the data set did not get much focus in the coursebooks.

3.2.2. What kind of problems and solutions regarding the arithmetic mean were included in Turkish coursebooks and which representation form was used in the problems with solutions?

The approach adopted in teaching the concept of arithmetic mean reflected on the types of the problems solved in the coursebooks, the representation forms through which the problems were asked, the strategies used in solving the problems, and the representation forms used in the solution. Table 3 lists the results on the types of the problems solved in the coursebooks and the representation forms through which the problems were asked.

Table 3. The type of problems solved in the coursebooks

Problem type	TR6A f (%)	TR6B f (%)	TR7 f (%)
A1	3	3	2
A2	0	0	0
B1	0	3	0
B2	0	0	0
B3	1	1	0
B4	0	0	0
C1	0	0	0
C2	0	0	0
C3	2	3	0
C4	0	0	2
The Representation Form through which the Problem Was Asked			
Verbal form	5	8	4
Visual form (column-line chart, unit cubes, etc.)	0	0	0
Multiple (Verbal + Visual)	1	2	0

The number of arithmetic mean problems with solutions is 6 in TR6A, 10 in TR6B, and 4 in TR7. TR6A includes only problems of types A1, B3, and C3; TR6B includes problems of types A1, B1, B3, and C3; and TR7 includes only problems of types A1 and C4 (Table 2). Note that none of the three books included problems with solutions of types A2, B2, B4, C1, and C2. Problems of type B1 were included only in TR6B. Examples of problems with solutions of types A1 and B1 are presented below.

“What is the arithmetic mean in this data set: 2, 4, 6, 8, 10” (An arithmetic mean problem asked in the verbal form in type A1, TR6A, p. 143).

"Zehra got 72 and 80 on the first two tests in Science and Technology. If Zehra wants her grade point average to be 84 in this class, what score should she get on the third test?" (An arithmetic mean problem asked in the verbal form of type B1, TR6B, p. 245).

Most problems in the coursebooks were asked in a verbal form, and in problems that were asked in the multiple form, the students were asked to identify the overall mean or interpret the mean together with the range. The number of problems asked in the multiple form was 1 in TR6A and 2 in TR6B. In the problem in TR6A that was asked in the multiple form, students were given a column chart and asked to interpret the arithmetic mean together with the range (Figure 5). Similarly, in the two problems that were asked in the multiple form in TR6B, the first gave a column chart and asked students to interpret the arithmetic mean together with the range, and the other gave a column chart and asked students to identify the arithmetic mean (Figure 6). Examples for these problem structures are presented below.

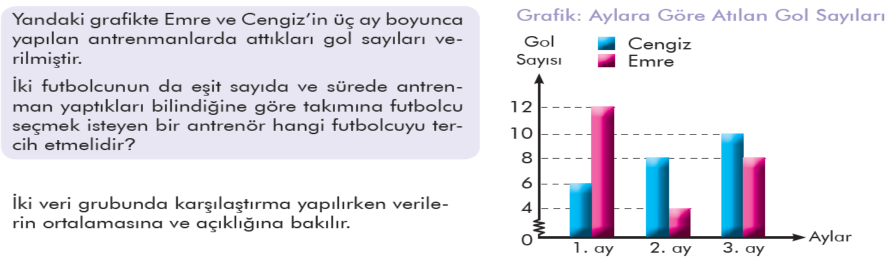
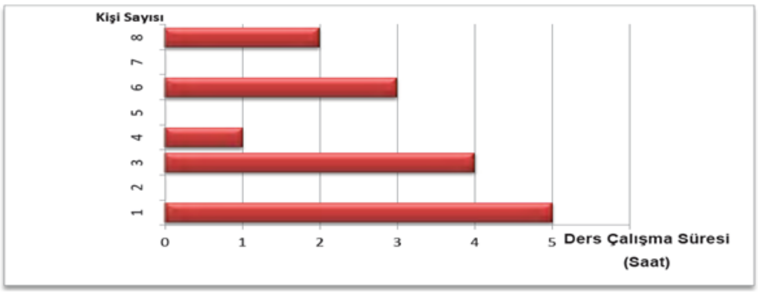


Chart: Goals by Months

Figure 5. An arithmetic mean problem asked in the multiple form of type C3, TR6A, p. 150. (The chart at the side gives the number of goals Emre and Cengiz scored in training for three months. If it is known that the number of training sessions the two players attended and the duration they trained are the same, which player should a manager that wants to pick a player for the team prefer? When comparing two data sets, the mean and range of the data should be considered)

The graph below shows the daily study times of the students in a class. What is the mean study time for the students in this class?



Number of people Study Time (Hours)

Figure 6. An arithmetic mean problem asked in the multiple form of type B3, TR6B, p. 244.

TR7 included problems of types A1 and C4, but no problems asked in the multiple form. An example regarding the structure of the problems included in the coursebook is shown in Figure 7.

Bir öğrencinin 1 hafta boyunca her gün çözdüğü soru sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Öğrencinin Bir Hafta Boyunca Çözdüğü Soru Sayısı

Günler	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Soru sayısı	5	14	15	80	5	5	16

Buna göre bu öğrencinin bir haftada çözdüğü soru sayısının aritmetik ortalaması, tepe değeri ve ortancasını bulalım. Bilgilerden hangisinin bize bu öğrencinin performansı hakkında etkili yorum yapabilme olanağı sağlayacağını bulalım.

[The table below gives the number of questions a student solved every day for a week. Days; Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Saturday, Sunday, Number of questions; 5, 14, 15, 80, 5, 5, 16]

Figure 7. An arithmetic mean problem asked in the verbal form in type C4, TR7, p. 267. (The table below gives the number of questions a student solved every day for a week. What are the arithmetic mean, mode, and median

of the number of questions the student solved in a week? Please indicate which of the information can enable us to make accurate comments regarding the performance of this student.)

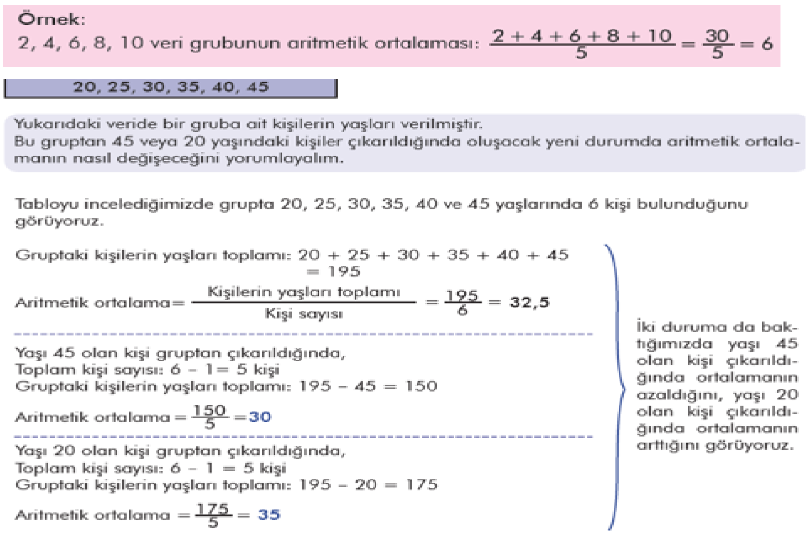
3.2.3. What solution strategies were included in the solution of the problems in Turkish coursebooks, and what representation forms were used in the solution?

Determining the types of arithmetic mean problems in the coursebooks is as significant as determining the strategies used in the solutions of these problems. This is because mathematical solutions through algorithm and prediction-check strategies do not ensure that the arithmetic mean is conceptually understood. Table 4 presents the results on the strategies and the representation forms used in the solution of the problems in the coursebooks.

Table 4. The strategies and representation forms used in solving problems related to the arithmetic mean in the coursebooks

	Coursebooks		
Solution Strategy	TR6A	TR6B	TR7
Center of balance	0	0	0
Fair Share	1	0	0
Prediction Check	0	0	0
Algorithm	5	10	4
The Representation Form Used in Solution			
Verbal	0	0	0
Picture	0	0	0
Manipulative	0	0	0
Symbol (arithmetic or algebraic)	6	10	4

The arithmetic mean problems in the coursebooks were solved only through the add–divide algorithm. Any solution through the center of balance, fair share, and prediction-check strategies were not included in the coursebooks. Moreover, different representation forms were not used in the solutions, and the solutions were presented only in an arithmetic form. Figures 8 and 9 present the problems with solutions in TR6A and TR6B, respectively. The first problem in Figure 8 asks what the arithmetic mean is in a data set of five numbers, and the other gives a data set of six numbers and asks how the arithmetic mean would change if any number from this data set is removed. Figure 9 shows two problems for identifying the unknown element in the data set.


Örnek:
2, 4, 6, 8, 10 veri grubunun aritmetik ortalaması: $\frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

20, 25, 30, 35, 40, 45

Yukarıdaki veride bir gruba ait kişilerin yaşları verilmiştir.
Bu gruptan 45 veya 20 yaşındaki kişiler çıkarıldığında oluşacak yeni durumda aritmetik ortalamanın nasıl değişeceğini yorumlayalım.

Tabloyu incelediğimizde grupta 20, 25, 30, 35, 40 ve 45 yaşlarında 6 kişi bulunduğunu görüyoruz.

Gruptaki kişilerin yaşları toplamı: 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 195

Aritmetik ortalama= $\frac{\text{Kişilerin yaşları toplamı}}{\text{Kişi sayısı}} = \frac{195}{6} = 32,5$

Yaşı 45 olan kişi gruptan çıkarıldığında,
Toplam kişi sayısı: 6 − 1= 5 kişi
Gruptaki kişilerin yaşları toplamı: 195 − 45 = 150

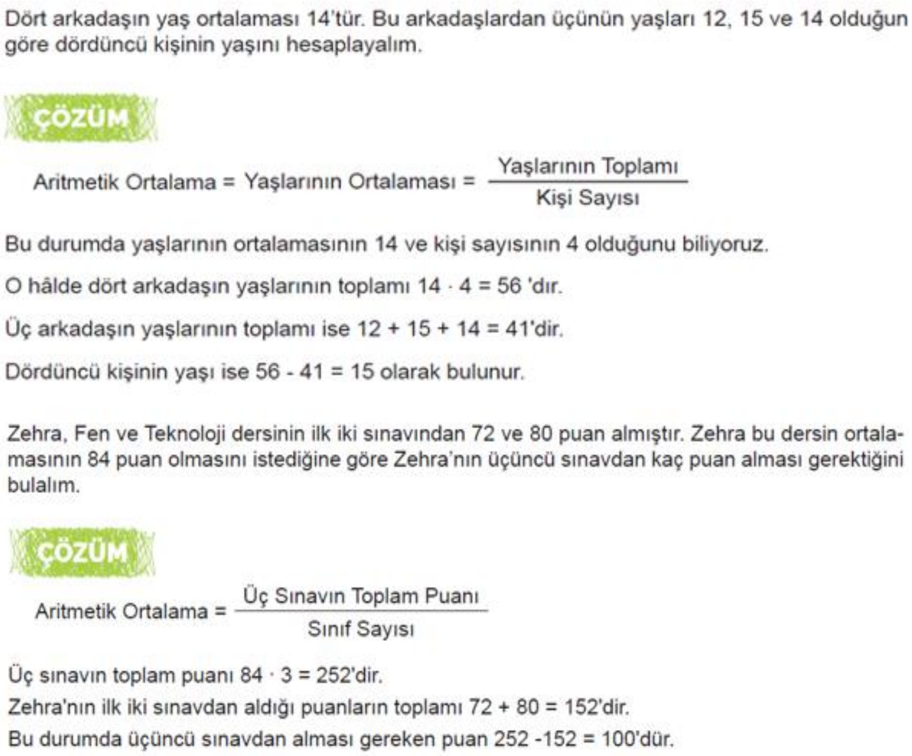
Aritmetik ortalama = $\frac{150}{5} = 30$

Yaşı 20 olan kişi gruptan çıkarıldığında,
Toplam kişi sayısı: 6 − 1 = 5 kişi
Gruptaki kişilerin yaşları toplamı: 195 − 20 = 175

Aritmetik ortalama = $\frac{175}{5} = 35$

İki duruma da baktığımızda yaşı 45 olan kişi çıkarıldığında ortalamanın azaldığını, yaşı 20 olan kişi çıkarıldığında ortalamanın arttığını görüyoruz.

Figure 8. The solution of the two problems of type A1 in TR6A through the algorithm in a verbal form (The arithmetic mean of the data set 2, 4, 6, 8, 10 is 30/5=6; 20, 25, 30, 35, 40, 45 … This data gives the ages of people in a group**.** Please interpret how the arithmetic mean would change when people at 45 and 20 are removed from this group. When we look at the table, we see that there are six people at the ages of 20, 25, 30, 35, 40 and 45. The sum of the ages of people in the group is as follows: Arithmetic mean = The sum of the ages of people / The number of people**,** When the person at 45 is removed. The total number of people is 6− 1 = 5 People**.** The sum of the ages of people in the group: 195-45=150, Arithmetic mean: 150/5=30. When the person at 20 is removed, The total number of people is 6− 1 = 5 People, The sum of the ages of people in the group: 195-20=175, Arithmetic mean: 175/5=35**.** For these two cases, we see that when the person at 45 is removed from the group, the mean decreases, and when the person at 20 is removed from the group, the mean increases)



Dört arkadaşın yaş ortalaması 14'tür. Bu arkadaşlardan üçünün yaşları 12, 15 ve 14 olduğun göre dördüncü kişinin yaşını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \text{Yaşlarının Ortalaması} = \frac{\text{Yaşlarının Toplamı}}{\text{Kişi Sayısı}}$$

Bu durumda yaşlarının ortalamasının 14 ve kişi sayısının 4 olduğunu biliyoruz.

O hâlde dört arkadaşın yaşlarının toplamı 14 · 4 = 56 'dır.

Üç arkadaşın yaşlarının toplamı ise 12 + 15 + 14 = 41'dir.

Dördüncü kişinin yaşı ise 56 - 41 = 15 olarak bulunur.

Zehra, Fen ve Teknoloji dersinin ilk iki sınavından 72 ve 80 puan almıştır. Zehra bu dersin ortalamasının 84 puan olmasını istediğine göre Zehra'nın üçüncü sınavdan kaç puan alması gerektiğini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{\text{Üç Sınavın Toplam Puanı}}{\text{Sınıf Sayısı}}$$

Üç sınavın toplam puanı 84 · 3 = 252'dir.

Zehra'nın ilk iki sınavdan aldığı puanların toplamı 72 + 80 = 152'dir.

Bu durumda üçüncü sınavdan alması gereken puan 252 -152 = 100'dür.

Figure 9. The solution of the two problems in type B1 in TR6B through the algorithm in verbal form (Problem 1: The mean age of four friends is 14. If the ages of three persons are 12, 15, and 14; what is the age of the fourth person?, Solution: We know that the mean age is 14 and the number of people is 4; thus, in this case, the sum of the ages of four friends is 14 × 4 = 56, The sum of the ages of the three friends is 12 + 15 + 14 = 41, and the age of the fourth person is 56 − 41 = 15; Problem 2: Zehra got 72 and 80 on the first two tests in Science and Technology. If Zehra wants her grade point average to be 84 in this class, what score should she get on the third test?, Solution: The total score on three tests is 84 × 3 = 252, The total score Zehra got on the first two tests is 72 + 80 = 152, In this case, the score she needs to get on the third test is 252 − 152 = 100)

The solutions to the problems presented in Figures 8 and 9 can be obtained via the arithmetic mean algorithm, and a different solution strategy was not applied. Although the fair share approach is briefly mentioned when introducing the concept of arithmetic mean in both coursebooks, there is no content on the relationship between the identified value and the elements in the data set. Consequently, the problems with solutions and the representation forms and solution strategies in solving the problems in the coursebooks push students to use the algorithm and do not allow students to interpret the relationship between the arithmetic mean and the elements in the data set and the arithmetic mean as a value that represents a data set and calculate the weighted mean.

4. Discussion and Conclusion

This study investigated how the concept of arithmetic mean (an essential concept in the learning domain of data) was presented in Turkish coursebooks, what kind of problems related to the arithmetic mean was covered, the types of representation forms through which the problems were presented, and the types of representation forms and solving strategies used in solving the problems. Although balance and fair-share models are strong analogies in understanding arithmetic mean conceptually, the two coursebooks for grade 6 did not cover these models sufficiently or did not cover them at all. For example, there was no explanation in the coursebooks saying that arithmetic mean is the center of balance in a data set. Furthermore, although one problem case on fair share was presented, the relationship between the arithmetic mean and elements in a data set and the discussions concerning arithmetic mean as a value that represents the data set were not covered in the coursebooks. An indicator, perhaps the best one that shows the arithmetic mean is conceptually understood, is interpreting it as a value that represents a data set (Leavy, 2001; Mokros & Russell, 1995). What arithmetic mean, as a statistical concept, means to a data set can be taught via fair share and balance models (Cai & Moyer, 1995; Hardiman et al., 1984; Uccellini, 1996; Van de Walle et al., 2013). An experimental study conducted by Hardiman et al. (1984) demonstrated that teaching through the balance model enabled students to understand weighted mean better. Cai and Moyer (1995) reported that the idea of fair share positively affected students' performance for solving problems related to the arithmetic mean. In this regard, the fair share and center of balance approaches can be used in Turkish coursebooks for teaching the relationship between the concept of arithmetic mean and the elements in a data set and what it means for the data set.

Considering the types of arithmetic mean problems with solutions in the coursebooks, none of the three books included a problem with solution of type B2, B4, C1, and C2. Having problems of type B and C in coursebooks is essential in students' learning the concept of arithmetic mean in depth (Bremigan, 2003; Leavy & O'Loughlin, 2006; Russell & Mokros, 1996). A problem of type B2 will encourage students to consider the center of balance in the arithmetic mean (Russell & Mokros, 1996). An indicator that shows the arithmetic mean is understood conceptually is the ability to solve weighted mean problems (Mevarech, 1983; Pollatsek et al., 1981). In this sense, problems of type B4 should be included in the coursebooks. Bremigan (2003) maintained that the conceptual understanding of arithmetic mean depends on understanding the seven properties of the arithmetic mean (Strauss & Bichler, 1988). One of these properties is that the arithmetic mean may not always be a natural number. The students will find this normal when they learn about the relationship between the arithmetic mean and the elements in the data set and that it is a value that represents the data set. Therefore, coursebooks should include problems of type C1 and C2 (Bremigan, 2003; Cai et al., 2002; Leavy & O'Loughlin, 2006; Watson, 2007). Unlike the results of the present study, Leavy and O'Loughlin (2006) used problems that required comparing two data sets that did not have equal number of elements (C1), calculating weighted means (B4), and constructing a data set with seven elements whose arithmetic mean is known (B2) for determining whether the concept of arithmetic mean is understood conceptually. Uçar and Akdoğdan (2009) and Enisoğlu (2014) used arithmetic mean problems in several types in their studies. For example, there are eight students at different ages in a scout camp, and the mean age of the students in this group is 15. Thus, please draw a column chart that shows what the ages of these students might be in the area below and create a sample data set based on the information given (Type B2).

Most problems in the coursebooks were asked in a verbal form; in problems that were asked in the multiple form, students were asked to identify the overall mean or interpret the mean together with the range. The number of problems asked in the multiple form was 1 in TR6A and 2 in TR6B. TR7, however, it did not include any problems in the multiple form. Unlike the results of the study, the literature includes studies where problems were asked via various representation forms (Enisoğlu, 2014; Koparan & Güven, 2014; Uçar & Akdoğan, 2009). The representation form through which the problems are presented affects the representation form students choose to solve the problem. The representation forms students use are directly linked to the solution strategies they choose, e.g., students who use the add–divide strategy mostly preferred symbolic representation. The students using the levels equalizing strategy applied representation by images (Cai & Moyer, 1995). Previously, studies reported that the number of problems presented in the visual form is higher in number in American coursebooks than Chinese coursebooks; therefore, American students often choose using representation by visuals for solving problems than Chinese students (Brenner et al., 1999; Cai, 1995). In mathematics classes, students are usually given a problem in a symbolic or verbal form and are expected to solve it in a symbolic form (the arithmetic mean algorithm). This directs the students to use the algorithm but does not ensure conceptual student learning (Cai, 1995; Cai & Moyer, 1995). In this regard, coursebooks should be enriched in terms of arithmetic mean problems of diverse types and asked through different representation forms.

Determining the types of arithmetic mean problems in coursebooks is as significant as determining the strategies used in the solution of these problems. The solution strategies used by the students can inform whether students conceptually learned the concept of arithmetic mean (Mokros & Russell, 1995; Watson & Moritz, 2000). This is because mathematical solutions via algorithm and prediction-check strategies do not ensure that the arithmetic mean is conceptually understood; however, the use of the center of balance and fair share approaches in the solution of problems indicates that the arithmetic mean is conceptually understood (Hardiman et al., 1984; Marnich, 2008; Uccellini, 1996). The arithmetic mean problems in coursebooks were solved only via the add–divide algorithm. Solutions through the center of balance, fair share, and prediction-check strategies were not included in the coursebooks. Moreover, different representation forms were not used in the solutions, which were presented only in an arithmetic form. In previous studies, it was reported that along with the content in the coursebooks, students frequently applied the add–divide algorithm for solving arithmetic mean problems without knowing the meaning that underlies the algorithm (Uçar & Akdoğan, 2009; Kaynar & Halat, 2012; Enisoğlu, 2014). In their study, Çakmak and Durmuş (2015) aimed to identify the concepts students in Grades 6–8 had difficulty within the learning domain of statistics and probability and identified the reasons behind this difficulty. In the interviews, students reported that they had forgotten the arithmetic mean formula. Ünlü (2008) stated that one of the most significant reasons students fail in mathematics is memorizing formulas and not being able to recall the memorized information afterward. In this context, various solution strategies should be included in the solution of arithmetic mean problems in coursebooks. Students should be encouraged to apply different solution strategies, and solving problems through various strategies and representation forms enables students to learn the related concept in depth. The students who learned the concept of arithmetic mean conceptually considered frequently using multiple representations in their solutions. In this regard, in the course books, different strategies and multiple representation forms should be used for solving arithmetic mean problems.

5. Recommendations

Although the fair share approach is briefly mentioned in Turkish coursebooks, the facts that the relationship between the resulting value and the elements in the data set and what it means for the data set was not mentioned and the center of balance approach was not mentioned at all may push students to superficially learn the concept of arithmetic mean. The problems in the coursebooks and the strategies and representation forms used in the solutions of problems might push students to think and act with focus only on the algorithm and make their solutions in the symbolic form. This might cause students to have difficulty and make mistakes when solving arithmetic mean questions that measure their conceptual understanding levels in international examinations. In this context, the fair share and center of balance approaches should be used in Turkish coursebooks when teaching the relationship between the arithmetic mean and the elements in the data set and what it means for the data set. Furthermore, the books should be enriched in terms of the problems of various types and questions should be asked via different representation forms. Different strategies and multiple representation forms should be used for solving arithmetic mean problems in the coursebooks. Future studies might investigate the extent to which mathematics teachers use coursebooks when teaching the concept of arithmetic mean, what students understand by the concept of arithmetic mean, and what representation forms they use and what solution strategies they apply when solving arithmetic mean problems. For this purpose, whether students learn the concept of arithmetic mean deeply can be revealed. The results might enable us to see the effect of the coursebook on the performances of students more clearly.

Kaynaklar/References

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Bektaş, M., Kahraman, S. ve Temel, Y. (2018). *Matematik ders kitabı 6*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40.

Bremigan, E. G. (2003). Developing a meaningful understanding of the mean. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(1), 22-26.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z., & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 541-547.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: Students' understanding of the arithmetic average concept. In L. Meria, & D. Carraher (Eds.), *Proceeding of the 19th Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 3. pp. 144-151). Sao Paulo, Brazil: PME Program Committee.

Cai, J. (1998). Exploring students' conceptual understanding of the averaging algorithm. *School Science and Mathematics, 98*(2), 93-98.

Cai, J. (2000). Understanding and representing the arithmetic averaging algorithm: An analysis and comparison of US and Chinese students' responses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 839-855.

Cai, J., Lo, J., & Watanabe, T. (2002). Intended treatmens of arithmetic average in U.S. and Asian School mathematics textbooks. *School Science and Mathematics, 102*(8), 391-404.

Cai, J., & Moyer, J.C. (1995). Middle school students' understanding of average: A problem solving approach. In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 359-364). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117–151.

Chatzivasileiou, E., Michalis, I., & Tsaliki, C. (2010). Elementary school students' understanding of concept of arithmetic mean. In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence based society. *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. The Netherlands: International Statistical Institute.

Çakmak, Z. T. ve Durmuş, S. (2015). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin istatistik ve olasılık öğrenme alanında zorlandıkları kavram ve konuların belirlenmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 15*(2), 27-58.

Çağlayan, N., Dağıstan, A., ve Korkmaz, B., (2018). Ort*aokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 6 Ders Kitabı*. Ankara: Devlet Kitapları.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Enisoğlu, D. (2014). *Yedinci sınıf öğrencilerinin sütun grafiği gösteriminde verilen aritmetik ortalama, ortanca ve tepe değer kavramları ile ilgili problemleri çözerken kullandıkları olası çözüm stratejileri, yaptıkları hatalar ve yanlış yorumlamaları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Flanders, J. (1994). Student opportunities in grade 8 mathematics: Textbook coverage of the SIMS test. In I. Westbury, C. A. Ethington, L. A. Sosniak, & D. P. Baker (Eds.), *In search of more effective mathematics education: Examining data from the IEA second international mathematics study* (pp. 61–93). Norwood, NJ: Ablex.

Gattuso, L., & Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. In L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee, & W. K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-692). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gfeller, M. K., Niess, M. L., & Lederman, N. G. (1999). Preservice teachers' use of multiple representations in solving arithmetic mean problems. *School Science and Mathematics, 99*(5), 250–257.

Ginat, D., & Wolfson, M. (2002, July). *On limited views of the mean as point of balance*. Paper presented at the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, England.

Goodchild, S. (1988). School pupils' understanding of average. *Teaching Statistics, 10*, 77–81.

Hardiman, P. T., Well, A. D., & Pollatsek, A. (1984). Usefulness of the balance model in understanding the mean. *Journal of Educational Psychology, 76*(5), 792– 801.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hong, D. S., & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: The case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 241–263.

Kaynar, Y. ve Halat, E. (2012, Haziran). *İlköğretim II. kademe matematik öğretim programının "olasılık ve istatistik" alt öğrenme alanının "istatistik" boyutunun incelenmesi.* X. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 259-289.

Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Ortaokul öğrencilerinin istatistiksel düşünme seviyelerinin m3st modeline göre incelenmesi. *Eğitim ve Bilim, 39*(171), 37-51.

Leavy, A. M. (2001). *Elementary and middle grade students' understanding of distribution* (Unpublished doctoral dissertation). Arizona State University, the USA.

Leavy, A., & O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 53–90.

Leon, M. R., & Zawojewski, J. S. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties, issues and preliminary results. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. I, pp. 302–306). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Marnich, M. A. (2008). *A knowledge structure for the arithmetic mean: Relationships between statistical conceptualizations and mathematical concepts* (Unpublished doctoral dissertation). University of Pittsburgh, the USA.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 415–429.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ve 8. sınıflar)*. http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329 adresinden 01.09. 2019 tarihinde erişilmiştir.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of a average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Retrieved 01.01.2019 from https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. Retrieved 01.01.2019 from http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/internationalresults/

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oğan, A. K. ve Öztürk, S. (2019). *Matematik 7. Sınıf ders kitabı*. Ankara: Milli Eğitim Yayınları.

Pollatsek, S. J., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or understanding: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 191–204.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 2009 conference on Artificial Intelligence in Education: Building Learning Systems that Care: From Knowledge Representation to Affective Modelling* (pp. 441-448). Amsterdam, The Netherlands: IOS Press.

Russell, S. J., & Mokros, J. (1996). What do children understand about average? *Teaching Children*, *2*(6), 360-364.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 141-156.

Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117–142.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences students' learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning Charlotte* (pp. 557–628). Greenwich: Information Age.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concept of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 64-80.

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. de Lange, & M. Doorman (Ed.), *Senior secondary mathematics education* (pp. 37-41). Utrecht: OW & OC.

Uccellini, J. C. (1996). Teaching the mean meaningfully. *Mathematics Teaching in Middle School, 2*(3), 112-115.

Uçar, T. Z. ve Akdoğan, N. E. (2009). İlköğretim 6–8. sınıf öğrencilerinin ortalama kavramına yüklediği anlamlar. *İlköğretim Online, 8*(2), 391–400.

Ünlü, M. (2008). *İşbirlikli öğrenme yönteminin 8. sınıf öğrencilerinin matematik dersi 'permütasyon ve olasılık' konusunda akademik başarı ve kalıcılık düzeylerine etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1&2), 11–50.

Watson, J. M. (2007). The role of cognitive conflict in developing student's understanding of average. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 21-47.

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B., & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *PRIMUS, 22*(2), 152-175.

Zazkis, D. (2013). On students' conceptions of arithmetic average: The case of inference from a fixed total. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(2), 204-213.