Turkish Journal of Computer and Mathematics Education *Vol.10 No.1 (2019), 260-289*
Araştırma Makalesi

Bilgisayar Destekli Soyut Cebir Öğretiminin Başarıya ve Matematiğe Karşı Tutuma Etkisi: ISETL Örneği

Serpil Yorgancı

Atatürk Üniversitesi, Erzurum Meslek Yüksekokulu (ORCID: 0000-0001-7284-8340)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 21 Ekim 2018; Yayına kabul tarihi: 16 Ocak 2019; Çevrimiçi yayın tarihi: 17 Şubat 2019

Öz: Araştırma, bilgisayar destekli soyut cebir öğretiminin, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının akademik başarılarına ve matematiğe karşı tutumları üzerine etkisini belirlemeyi amaçlamaktadır. Çalışmanın örneklemini, bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında öğrenim gören toplam 30 öğrenci oluşturmaktadır. Eşit olmayan kontrol gruplu ön test-son test deneysel desenin benimsendiği çalışmada kontrol grubunda geleneksel öğretim yöntemi, deney grubunda ise APOS teorisine dayalı olarak geliştirilen ACE (activities, class discussion, exercices) öğretim döngüsü kullanılmıştır. Bu çerçevede deney grubunda ACE döngüsünün ilk adımı olan bilgisayar aktivitelerinde ISETL programlama dili kullanılmıştır. Araştırmanın verileri akademik başarı testi, matematik tutum ölçeği ve görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, deney ve kontrol grubunun başarı ve tutum puanları arasında deney grubu lehine anlamlı farklar olduğunu göstermiştir. Görüşmelerden elde edilen bulgular; deney grubu öğrencilerinin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin anlamalarının, kontrol grubu öğrencilerine göre daha ileri düzeyde olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Başarı, tutum, bilgisayar destekli matematik, APOS teorisi, ACE döngüsü

DOI: 10.16949/turkbilmat.473030

Abstract: The research aims to test whether a computer-assisted abstract algebra instruction has significant influence on students' achievement levels and their attitudes toward the mathematics. The sample of the study consists of a total of 30 students studying in the elementary mathematics teacher training program of the faculty of education of a state university in Turkey. The methodology of this study is nonequivalent pretest-posttest control group experimental design. The traditional teaching method was used in the control group and the ACE (activities, class discussion, exercises) teaching cycle based on the APOS theoretical framework was used in the experimental group. In this framework, ISETL programming language was used in the computer activities which was the first step of ACE cycle in the experimental group. The data were collected through academic achievement test, math attitude scale and interviews. The results showed that the use of ISETL programming language in abstract algebra teaching increased academic achievement and attitudes towards mathematics course. Findings from interviews showed that the experimental group students' understanding of the concepts of normal subgroup and quotient group was more advanced than the control group students.

Keywords: Achievement, attitudes, computer-assisted mathematics, APOS theory, ACE cycle

See Extended Abstract

1. Giriş

19. yüzyılda, sayılar teorisi, geometri, analiz, polinom denklemlerin çözülebilirliği ve çeşitli sayı sistemlerinin özelliklerinin araştırılması gibi problemleri çözme sürecinde aksiyomatik sistemlerin kullanılmaya başlamasıyla ortaya çıkan "soyut" cebir, varoluşunu

Sorumlu yazar: Serpil Yorgancı **e-posta:** serpil.yorganci@atauni.edu.tr

Kaynak Gösterme: Yorgancı, S. (2019). Bilgisayar destekli soyut cebir öğretiminin başarıya ve matematiğe karşı tutuma etkisi: ISETL örneği. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 260-289.

büyük ölçüde klasik problemlerin klasik yöntemlerle çözülemeyişine borçludur (Kleiner, 2007). Günümüzde grup, halka ve cisim gibi soyut, aksiyomatik sistemlerin çalışması anlamına gelen soyut cebirin önemli kullanım alanlarından biri bilinen sayı sistemlerini diğer faydalı sistemlere doğal yollarla genişletmesidir. Bu süreç, bilinen ilk sayı sistemi olan doğal sayılardan başlayarak kompleks sayı sistemine ve modüler aritmetik sistemine kadar devam etmiştir (Gilbert, 1976). Bu çalışmada soyut cebirin kullanım alanlarını genişletmesinden dolayı matematikte önemli bir yere sahip olan normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarının öğretimi ele alınacaktır.

Soyut cebirin tarihi gelişiminde kilometre taşlarından biri olan "grup" kavramını ilk defa kullanan Galois (1831), normal alt grup kavramı ile denklemlerin radikallerle çözülebilirliğinin sırrını çözmüştür. Galois her denklemin, köklerinin rasyonel fonksiyonlarını değiştirmeyen permütasyonlarından oluşan bir grubu olduğunu ve bir radikalin eklenmesiyle birlikte simetrinin indirgenmesinin normal bir alt grubun oluşumuna karşılık geldiğini ortaya koymuştur. Denklemin radikallerle çözümü, ancak grubun normal alt gruplarından oluşan bir zincirle özdeş permütasyona indirgenebildiğinde mümkün olabilmektedir. Ancak bugünkü formal tanımında bu kavram, tarihi çıkış noktasından farklı olarak sembolik ve soyut bir yaklaşımla ele alınmaktadır. Diğer yandan normal alt gruptan daha karmaşık ve daha zor bir kavram olarak görülen bölüm grubu kavramı da grup teorisinde önemli bir yer teşkil etmektedir. Bölüm grupları olmaksızın grup teorisinin neredeyse düşünülemeyeceği (Van der Waerden, 1939) görüşünün hâkim olduğu bu temel kavramın geliştirilmesinde Nicholson'a (1993) göre üç noktaya dikkat edilmesi gerekmektedir. Bunlar: herhangi bir temsil türüne bağlı olmayan soyut grup kavramı, denklik kavramı ve bölüm grubunun öğelerinin orijinal grubun öğeleri gibi olmadığı, denklik sınıflarından oluştuğudur.

Araştırmalar normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarının soyut cebir dersinde problem olan kavramlar olduğunu göstermektedir (Brenton & Edwards, 2003; Leron & Dubinsky, 1995). Öğrencilerin normal alt grup kavramı ile ilgili yaşadıkları en önemli yanılgı, normalliği değişmelilik olarak yorumlamalarıdır. Normal alt grup kavramı iyi bir şekilde anlaşılmadığında, bu durumun bölüm grubu kavramının yapılandırılmasını da olumsuz yönde etkileyeceği görülmektedir. Dubinsky, Dautermann, Leron ve Zazkis'e göre (1994), normal alt grubun öğrenimindeki en önemli engellerden biri kavramın ilk tanıtımında değişmeli grup yapılarının ele alınmasıdır. Değişmeli olmayan grupların normal alt gruplarının incelenmesi, öğrencilerdeki bu kavram yanılgısının da önüne geçebilecektir.

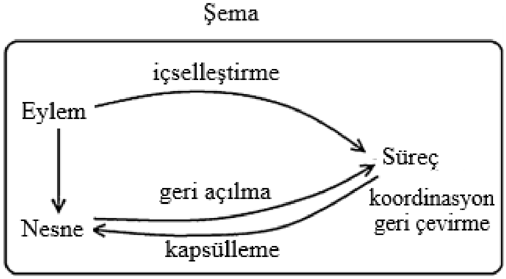
Öğrencilerin bölüm grubu kavramına ait öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanılgılarının altında yatan nedenlerden birçoğunun, tanımda geçen normal alt grup ve yan küme kavramlarıyla ilişkili olduğu yapılan çalışmalarda göze çarpmaktadır: Quoc (2018), bölüm grubu kavramı ile ilgili üç epistemolojik engelin olduğunu savunmaktadır. Bunlar; orijinal grup ile onun bölüm grubunun elemanları arasındaki farklılıktan (bölüm grubu elemanlarının sembolik temsil sisteminden) kaynaklanan soyut engel, denklik bağıntısıyla sınıflara ayrılan bölüm grubunun oluşturulmasındaki yapısal engel ve orijinal grubun elemanlarından bölüm grubunun oluşturulmasındaki temel engel.

Brenton ve Edwards'a (2003) göre bölüm grubu kavramındaki başarısızlığın en önemli nedeni, öğrencilerin bölüm grubunun elemanlarının ne olduğunu bilmemeleridir. Parçalanış kavramının öğretimi ile kümelerin kümesi kavramını, öğrencilerin zihinlerinde daha kolay yapılandırabileceklerini belirtmişlerdir. Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics ve Oktac (1997), öğrencilerin bölüm grubu kavramını öğrenebilmeleri için ikili işlem, grup ve yan küme şemalarının koordinasyonunu sağlamaları gerektiği ve bu şemaların uyumlu kullanılması durumunda bölüm grubu kavramının yapılandırılabileceğini savunmuşlardır. Öğrenci yan küme şemasından yararlanarak, yan kümelerin kümesini; ikili işlem ve yan küme şemalarını kullanarak yan küme çarpımını teşkil edebilecek ve grup şemasından da normalliği ve yan kümelerin kümesinin, yan küme çarpımına göre grup olup olmadığını tespit edebilecektir.

Araştırmalar soyut cebir dersinin zor olarak algılanmasının, soyutlamayla mücadele ile başlayan ve dersin ispat temelli doğasına kadar uzayan nedenleri olduğunu göstermektedir (Capaldi, 2014; Grassl & Mingus, 2007; Hirsch, 2008; Ioannou & Iannone, 2011; Leron & Dubinsky, 1995). Weber ve Larsen'e (2008) göre, bu ders çoğu öğrenci için matematiksel soyutlama ve formal ispat süreci ile başa çıkmak zorunda oldukları ilk deneyimlerden biridir. Geleneksel yöntemlerin öğrencilerin soyut cebir kavramlarını anlamalarına imkan tanımayan doğası (Leron & Dubinsky, 1995), dersin kazanımlarını elde etmeye engel olmakla birlikte öğrencilerde ders ile ilgili "olumsuz bir şöhret" (Hoffman, 2017) oluşmaktadır. Algılanan bu eksiklikleri gidermek için araştırmacılar, on yıllardır öğrenci merkezli öğrenme, işbirlikçi öğrenme, teknoloji destekli öğrenme yöntemleri gibi çeşitli yenilikçi yaklaşımlar önermektedir (Hoffman, 2017). Alan yazında dikkat çeken ve soyut cebir kavramlarının teknoloji yoluyla keşfedilmesine imkan veren önemli yaklaşımlardan biri bilgisayar destekli/tabanlı soyut cebir öğretimidir. Soyut ve aksiyomatik yapıdaki kavramları daha somut hale getirmek (Nwabueze, 2004), ileri matematiksel düşünceye geçişi kolaylaştırmak, daha zor grup yapılarını çalışabilmek ve hesaplamalardan ziyade kavramlara odaklanabilmek amacıyla kullanılan bilgisayar programlar arasında ISETL, GAP, MAPLE, MAGMA, Geometer's Sketchpad yazılımları dikkat çekmektedir (Blyth & Rainbolt, 2010; Cetin & Dubinsky, 2017; Konyalıoğlu, 2006; Kulich, 2000; Rainbolt, 2002). Bu nedenle bu araştırma, birçok ülkede soyut cebir dersinin öğretiminde önemli bir öğrenme aracı olarak kullanılan ISETL matematiksel programlama dilinin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarının öğretimindeki etkinliğini incelemiştir.

1.1. Kuramsal Çerçeve

1995 yılında bir grup matematikçi RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) adını verdikleri bir araştırma grubu kurmuşlardır. RUMEC araştırmacıları, matematiğin nasıl öğrenilebileceği ve bu öğrenme sürecinde nasıl bir eğitim programı kullanabilecekleri düşüncesinden yola çıkarak, matematiksel bir kavramı öğrenmeye çalışan öğrencileri gözlemleyerek elde ettikleri veriler yardımıyla öğrenme sürecini anlamaya yardım eden bir model geliştirmişlerdir (Weller ve ark., 2000). Piaget'nin yapılandırmacılık kuramına dayanan Genetik Ayrışım Teorisini (Genetic Decomposition) genişleterek geliştirilen APOS teorisi, bireyin matematik bilgisinin, karşılaştığı bir matematik problemini çözmek için çeşitli zihinsel işlemler yapma isteğinden oluştuğunu savunan bir teoridir. APOS'a göre, bireyin matematiksel bir kavramı öğrenmede oluşturması gereken dört çeşit zihinsel yapı bulunmaktadır. Bunlar; eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema) yapılarıdır. Bu zihinsel yapılar oluşturulurken içselleştirme (interiorization) ve kapsülleme (encapsulation), geri açılma (de-encapsulation), koordinasyon (coordination), geri çevirme (reversal) ve genelleştirme (ınılır (bkz. Şekil 1).



Şekil 1. APOS ile zihinsel mekanizmalar arasındaki ilişki (Cetin & Dubinsky, 2017)

APOS, bireyde her kavramın gelişiminin eylemle başladığını savunmaktadır. Bazı durumlarda aynı kavramın gelişimi farklı eylemlerle başlayabilmektedir. Bu seviyedeki öğrenci yaptığı işlemlerin anlamını tam olarak kavrayamamıştır. Belli bir formülü veya kuralı kullanarak matematiksel problemi çözmeye çalışmaktadır. Öğrenci bir eylemi tekrar ederek ve onun üzerinde düşünüp içsel bir işlem oluşturduğunda o eylemi sürece içselleştirmiş (interiorization) olur (Dubinsky, 1991). Yani öğrenci, yaptığı işlemlerin farkında olup kısa yollar kullanabiliyor ve işlemler yapmadan sonucu tahmin edebiliyorsa süreç aşamasındadır. APOS'a göre eylemden sürece geçiş ani olmamaktadır. Eğer birey bütün olarak süreçlerin farkına varıp bu süreçler üzerinde başka eylem ve dönüşümler gerçekleştirebiliyorsa o zaman süreci nesnelleştirmiştir yani nesne içerisine kapsüllemiştir (encapsulation). Nesne basamağında, öğrenci bütün olarak süreçlerin farkına varıp kavramı tamamen özümseyebilmiştir. Bu noktada öğrenci süreç üzerinde yeni matematiksel işlemler yapabilmektedir. Çoğu zaman nesne, özelliklerini kullanmak üzere yeniden oluştuğu sürece dönüştürülerek yani geri açılarak (de-encapsulation) problem çözümü durumlarında kullanılır. Öğrenci, kavramı öğrenebilmek ya da karşılaştığı problemi çözebilmek için eylem, süreç, nesne ve kavram ya da problemle bağlantılı diğer şemaları birleştirerek bir yapı oluşturduğunda şema düzeyindedir. Şemalar yapılandırıldıkları zaman artık matematiksel durumları anlamlandırmada kullanılabilirler (Çetin ve Top, 2014). Var olan şemalar, başka şemalarda kullanılmak üzere bir nesne gibi düşünülerek nesnelleştirilebilmektedir (Dubinsky, 2001). Çetin ve Dubinsky'e (2017) göre, çeşitli matematiksel programlama dilindeki bilgisayar programları, APOS zihinsel yapılarını güçlendirmede önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada APOS'un önerdiği bu zihinsel yapıları oluşturmada, bölüm 1.1.1 de detaylı anlatılan ISETL programlama dili kullanılmıştır.

APOS'a göre, bireyin bir kavrama ilişkin zihninde oluşması beklenen yapıları ve bu yapıları elde etmek için kullanılan mekanizmaları tanımlamak için bir "genetik ayrışım" oluşturulur. Bu çalışmada, öğrencilerin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarını oluşturma düzeylerini belirlemek için, Dubinsky ve arkadaşları (1994) tarafından ortaya konan genetik ayrışım çerçevesi kullanılmıştır. Buna göre, normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin genetik ayrışım şöyle tanımlanmıştır:

Normal alt grup kavramının genetik ayrışımında grup ve alt grup şemalarının koordinasyonu söz konusudur. Buna göre, bir G grubunun H alt grubunun normal olup olmadığını araştırırken sol ve sağ yan kümelerinin elemanlarının tek tek yazılması veya hesaplanması eylem kavrayışıdır. Diğer yandan bu iki yan kümenin eşitliğinin kontrol edilmesi süreç aşaması ve her $a \in G$ için $aH = Ha$ eşitliğinin kontrol edilmesi de nesne aşamasına karşılık gelmektedir. Son olarak tüm bu durumları bir grup ve bu grubun bir alt grubunu içeren durumlara uygulamakta şema olarak belirlenmiştir.

Bölüm grubu kavramının genetik ayrışımında ise grup, ikili işlem ve yan küme şemalarının koordinasyonu söz konusudur. Yan küme şemasını kullanarak, yan kümeler kümesi; ikili işlem ve yan küme şemasını kullanarak, yan kümeler çarpımı ve grup şemasını kullanarak, normal alt grup ve yan küme çarpımı oluşturulmaktadır. Bu ön koşul kavramların kendi içindeki genetik ayrışımları, bölüm grubu kavramına ilişkin genetik ayrışımı şekillendirmektedir.

RUMEC, matematik öğretiminde APOS teorisini kullanabileceği üç bileşenden oluşan özel bir yapı tasarlamıştır. Bu bileşenler; belirli bir matematiksel kavramın kuramsal çerçevesi, bu kuramsal çerçeveye dayanan eğitsel programın tasarımı ve hem kuramsal çerçeve hem de eğitsel programı test etmek ve gerektiğinde yinelemek için verilerin toplanması ve analizidir (Dubinsky, 1995). Bu yapıya göre, kuramsal çerçeveye dayanılarak bir eğitim stratejisi belirlenmektedir. Yani öğrencilerin kavramla ilgili zihinsel işlemleri yapmalarına yardım edebilecek bir pedagoji tasarlanmaktadır. Önerilen eğitim stratejileri arasında ACE (activities, class discussion, exercises) döngüsü adı verilen özel bir pedagojik yaklaşım kullanılmaktadır. ACE; bilgisayar aktiviteleri, sınıf aktiviteleri ve ev ödevleri olmak üzere üç bileşenden oluşmaktadır. Bölüm 2.2.'de detaylı olarak ele alınan ACE öğretim döngüsü, kuramsal çerçevenin bir sonucu olmamakla birlikte onu destekleyen tasarımlardan biridir.

1.1.1. ISETL Programlama Dili

1960 lı yılların sonlarına doğru Jack Schwartz ve arkadaşları tarafından geliştirilen SETL programının daha ileri ve etkileşimli versiyonu olan ISETL (Interactive Set Language), temel matematik kavramlarına dayanan matematiksel bir programlama dilidir (Arnon ve ark., 2013). Kullanılan kod ve temel kalıpların standart matematiksel notasyonlarla benzer olması, matematik için gerekli olmayan sentaks ve kodların programda kullanılmaması ya da çok az olması ve programdaki temel objelerin matematiği öğrenmeye yardımcı olacak ifadelerde kullanılan öğelerden oluşması ISETL'nin en önemli özellikler arasında (Dubinsky, 1995) kabul edilmektedir.

Soyut cebir dışında kalkulus, lineer cebir, ayrık matematik öğretiminde de kullanılan ISETL (Smith, 1993) ücretsiz olması, kolay kullanımı ve kolay ulaşılabilirliği ile kullanıcıya avantajlar sunan bir programdır.

Araştırmalar ISETL'de programlama yapan öğrencilerin, matematiksel kavramları daha anlamlı öğrendiklerini ortaya koymaktadır (Dubinsky, 2001; Dubinsky & Schwingendorf, 1991). Dubinsky ve Tall'a (2002) göre, ISETl de özel grup yapılarını çalışarak tecrübe elde eden öğrenciler, daha formal kavramları oluşturmak için bir sezgi kazanmaktadır. Örneğin, bir G kümesi üzerinde tanımlanan 'o' işleminin kapalı olup olmadığım belirlemek için "func" öğesi ile,

```
> kapalı := func(G,o);
>> return
>>forall x,y in G:  x .o y in G;
>>end;
```

şeklinde kısa bir program yazıldıktan sonra,

```
>kapalı (G,o);
```

kodu ile G kümesinin "o" işlemine göre kapalı olup olmadığı belirlenebilmektedir. "o" işleminin sahip olduğu ya da olmadığı özellikleri araştırmak isteyen bir öğrenci, incelediği özelliğe ait "func" öğesini yazmakta zorlanmamaktadır. Çünkü "func" yapısının ikinci kısmında incelenen özelliğe ait matematiksel tanım ya da ilişki yazılmaktadır. Diğer matematiksel kavramların programlanma sürecinde de geçerli olan bu durum öğrencilerin kavramları zihinlerinde yapılandırmalarında, en etkili yollardan biri olarak görülmektedir (Fenton & Dubinsky, 1996). Bu bağlamda bu çalışmada, APOS teorisinin önerdiği zihinsel yapıların oluşturulması sürecinde ACE döngüsü içinde yer alan ISETL aktivitelerinin etkililiği araştırılmıştır.

1.2. Amaç

Çalışmanın amacı, APOS teorisine dayalı olarak geliştirilen ACE öğretim döngüsünde kullanılan ISETL programı ile tasarlanan öğretim ortamının etkililiğini araştırmaktır. Araştırmanın genel amacına bağlı olarak şu alt problemlere yanıt aranmıştır:

1. Normal alt grup ve bölüm grubu kavramları ile ilgili öğrencilerin başarısı açısından, ISETL programının kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim yöntemi ile geleneksel öğretim yöntemi arasında önemli bir farklılık var mıdır?

2. Öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları açısından, ISETL programının kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim yöntemi ile geleneksel öğretim yöntemi arasında önemli bir farklılık var mıdır?

2. Yöntem

Araştırmada eşit olmayan kontrol gruplu ön test-son test deneysel desen (non-equivalent control-group pretest-posttest design) kullanılmıştır. Bu modele göre; seçkisiz atama yöntemiyle biri deney, biri de kontrol olmak üzere iki grup oluşturulur ve her iki gruba da çalışma öncesi ve sonrası aynı testler uygulanarak ölçümler yapılır.

Çalışmanın örneklemini, bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında aynı sınıfta öğrenim gören toplam 30 üçüncü sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Deney ve kontrol grubu oluşturulurken öncelikle öğrenci sayıları eşitlenmiş ve her iki gruptaki öğrencilerin deneysel işlem sürecinde normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin bilişsel giriş davranışlarının ve matematiğe karşı tutumlarının denkliğini sağlamak için Akademik Başarı Testi (ABT) ve Matematik Tutum Ölçeği (MTÖ) ön-test olarak uygulanmıştır. Tablo 1'de grupların akademik başarı ve tutum düzeylerini tespit etmek için yapılan ön test sonuçları verilmiştir.

Tablo 1. Deney ve Kontrol Grubu Ön test Sonuçları

Test	**Grup**	**n**	**Ortalama**	**SS**	**t**	**p**
ABT	Deney Grubu	15	33.22	9.11	.47	.65
	Kontrol grubu	15	32.06	10.13		
MTÖ	Deney Grubu	15	102.43	12.65	.05	.95
	Kontrol grubu	15	104.54	14.45		

Sonuçlara göre, ön test puan ortalamaları arasında gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark saptanmamıştır. Elde edilen bulgulardan grupların birbirine yakın düzeyde ön bilgiye ve tutuma sahip oldukları kabul edilmiştir. Bu bağlamda, seçkisiz atama yolu ile gruplar deney (N=15) ve kontrol (N=15) grubu olarak belirlenmiştir.

2.1. Veri Toplama Araçları

2.1.1. Akademik Başarı Testi (ABT)

Öğrencilerin öğrenme düzeylerini belirleyebilmek amacıyla hazırlanan akademik başarı testi (ABT) için 20 adet açık uçlu sorudan oluşan bir deneme formu oluşturulmuştur. Testin oluşturulma aşamasında ilgili alan yazın taranarak, iki ölçme değerlendirme ve dört alan uzmanının görüşlerinden yararlanılmıştır.

Sonraki aşamada madde analizi yapmak ve testin güvenirliğini hesaplamak için pilot uygulama yapılmıştır. Pilot çalışma, bir devlet üniversitesinin fen fakültesi matematik bölümüne devam eden üçüncü sınıfta öğrenim gören toplam 26 öğrenciye uygulanarak gerçekleştirilmiştir. Haftada toplam 3 ders saati olmak üzere 2 hafta süren pilot çalışmada, öğrenciler rasgele iki gruba ayrılmış, gruplardan biri ISETL programlama dilini esas alan bilgisayar destekli yöntemin kullanıldığı deney grubu, diğeri ise geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubu olarak seçilmiş ve bu seçim de rasgele yapılmıştır. ABT ve MTÖ her iki gruba da ön test ve son test olarak uygulanarak ölçümler yapılmıştır. Uygulama sonunda, elde edilen veriler üzerinden SPSS programı kullanılarak madde analizi ve güvenilirlik analizi çalışmaları yapılmıştır. Sonuçlara göre, güçlük indeksi 0.20'nin altında ve 0.80'in üzerinde olan 4 madde ile ayırıcılık indeksi 0.30'un altında olan 2 madde testten çıkarılmıştır. Son hâliyle ABT, 14 sorudan oluşmuştur. Testin güvenirliği için KR-20 değeri hesaplanmış ve bu değer 0.89 olarak bulunmuştur.

Geliştirilen ABT testinin geçerliliği için ilgili uzmanların görüşlerine başvurulmuştur. Uzmanlar geliştirilen testin araştırma kapsamındaki konuları ölçmeye yönelik olarak geçerliliğinin yüksek olduğunu belirtmişlerdir. ABT, araştırma kapsamındaki öğrencilerin tamamına ön test ve son test olarak uygulanmıştır.

2.1.2. Matematik Tutum Ölçeği (MTÖ)

Duatepe ve Çilesiz (1999) tarafından geliştirilen tutum ölçeği, hiç katılmıyorum, katılmıyorum, kararsızım, kısmen katılıyorum ve tamamen katılıyorum şeklinde beş seçenek içeren Likert tipi otuz sekiz madde içermektedir. Ölçek; ilgi duyma, güvenme, önemini anlama zevk alma şeklinde dört boyuttan oluşmaktadır. Tutum ölçeğinin Cronbach alfa güvenilirlik katsayısı 0.93 olarak hesaplanmıştır.

Matematik tutum ölçeği (MTÖ), araştırma kapsamındaki öğrencilerin tamamına ön test ve son test olarak uygulanmıştır.

2.1.3. Görüşmeler

Son test verileri toplandıktan sonra, deney ve kontrol grubundaki öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde 5 adet açık uçlu sorunun yer aldığı bir form kullanılmıştır. Görüşme soruları hazırlanırken, önce alan yazın taraması yapılmış ve konuyla ilgili çalışmalar incelenerek formda kullanılacak ifadeler belirlenmiştir. Formda, araştırma grubunun deneyimleri ile yakından ilişkili sorulara yer verilmiştir. Genel olarak öğrencilerin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarını nasıl tanımladıkları, kavramların birbiriyle olan ilişkisi, ISETL programının bu kavramların öğretiminde kullanılmasını nasıl değerlendirdikleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Taslak form hazırlandıktan sonra kapsam geçerliliğinin sağlanması amacıyla doktor unvanına sahip iki ölçme değerlendirme uzmanı ve matematik eğitimi alanında çalışan üç öğretim üyesinin görüşlerine sunulmuştur. Uzmanların görüşleri doğrultusunda soru ifadelerinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra görüşme formuna son şekli verilmiştir. Görüşme formunda öğrencilere şu sorular yöneltilmiştir:

1. Normal alt grup nedir? Bir grubun tüm alt gruplarının normal olmasını garanti eden bir özelliği var mıdır? Açıklayınız. (Deney ve kontrol grubu öğrencileri için)
2. $\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0, 4, 8\}$ alt grubunu düşünelim.
   - G/H grubunu teşkil ediniz.
   - G/H grubunun işlemi nedir? (G/H grubundaki iki elemanı nasıl çarparsınız?
   - G/H grubunun işlem tablosunu yapınız.
   - G/H grubundaki özdeş eleman nedir?

(Deney ve kontrol grubu öğrencileri için)

3. $\mathbb{Z}_{15}$'te $G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ grubu ve $H = \{1, 14\}$ alt grubu için 2. sorudaki seçenekleri yanıtlayınız. (Deney ve kontrol grubu öğrencileri için)

4. S_3 grubunun bir N normal alt grubunu ve normal olmayan bir H alt grubunu bulunuz. S_3/N bölüm grubunu teşkil ediniz. (Deney ve kontrol grubu öğrencileri için)
5. Soyut cebir dersinde, ISETL programlama dilini kullanarak uygulamalar yaptınız. ISETL programlama dili hakkında düşünceleriniz nelerdir?
   - Bu programda neler hoşunuza gitti?
   - Bu programda hoşunuza gitmeyen bir şey var mı?
   - Bu programın diğer derslerde de kullanılmasını tavsiye eder misiniz?
   - ISETL programı normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarını öğrenmenizde size nasıl katkı sağlamıştır? Açıklayınız.

   (Deney grubu öğrencileri için)

ABT testine doğru, kısmen doğru ve yanlış cevap veren öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Buna göre deney grubunda, gruptaki bütün öğrencilerle, kontrol grubunda ise 9 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Her bir katılımcı için yaklaşık 15-20 dakika süren görüşmeler, yazılı olarak kayıt altına alınmış ve bu kayıtlar daha sonra bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

2.2. Deneysel Süreç

Bu bölümde deney ve kontrol gruplarına uygulanan öğretim yöntemleri anlatılmıştır. Deneysel işlem haftada üç saat olmak üzere iki hafta sürmüştür. Uygulama başlamadan önce üç hafta boyunca deney grubu öğrencilerine ISETL programı tanıtılmıştır. Bu aşamada deney grubu öğrencilerine haftada iki saat, ISETL programının genel görünümü, butonlar, dosya oluşturma, dosya kaydetme gibi temel işlemler anlatılarak, bu programlama dilinde bolca aritmetik işlem yapmaları, kod ve kalıpları pekiştirmeleri sağlanmıştır. Üç haftanın sonunda deneysel işlem her iki grupta da başlamıştır.

Normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarının öğretimine yönelik kontrol grubunda gerçekleşen uygulamada, dersler iki hafta süreyle geleneksel yöntem olarak adlandırılan, düz anlatım, soru-cevap ve tartışma tekniği kullanılarak sürdürülmüştür. Deney grubunda ise dersler, ACE döngüsüne göre hazırlanan öğrenme ortamında anlatılmıştır. ACE öğretim döngüsüne göre, ders üç bölüme ayrılmıştır: Öğrenciler ilk olarak haftada bir defa bilgisayar laboratuvarında bir araya gelmişlerdir. İkinci aşamada bilgisayar aktivitelerinin ardından sınıf ortamında bilgisayar olmadan aktivitelerine devam etmişlerdir. Son aşamada ise bilgisayar laboratuvarında ve sınıfta öğrendikleri kavramlarla ilgili ev ödevleri verilmiştir. Her bir kavram için döngü bir hafta sürmüştür. Deney grubu öğrencileri haftada iki saat bilgisayar laboratuvarında, bir saat sınıf ortamında (kontrol grubundan ayrı olarak) derse katılmışlardır.

Bilgisayar aktivitelerinde öğrencilere çalışma yaprakları dağıtılmıştır. İçinde kısa ipuçları bulunan çalışma yapraklarında, öğretilmek istenen kavramlar küçük parçalara ayrılarak gerçek tanımları yapılmadan tanıtılmıştır. Ek 1'de bilgisayar aktivitelerinde öğrencilere dağıtılan örnek çalışma yaprakları gösterilmiştir. Asıl öğrenmenin bilgisayar laboratuvarında gerçekleşmediği göz önüne alınarak, öğrencilere çok sayıda uygulama yapma, kavramlar hakkında fikir sahibi olma, bağıntı ve ilişkileri tahmin etme olanağı verilmiştir.

Örneğin bölüm grubu kavramının oluşturulması sürecinde öğrencilerin bu kavramla ilgili tecrübe etmeleri gereken çeşitli ISETL uygulamaları aşağıdaki gibi sıralanabilir. Bir G grubunun bir H alt grubuna göre sağ ve sol yan kümelerini veren "func" sırasıyla;

```
>   sag(H,g) := func(H,g);
>>    return
>>    {h .o g: h in H};
>>  end;
```

ve

```
>   sol(H,g) := func(H,g);
>>    return
>>    {g .o h: h in H};
>>  end;
```

şeklinde yazılabilir. Farklı grup ve alt grup örnekleri için yeniden yazmaya gerek kalmadan, bu "func" kodu ile öğrenciler sağ ve sol yan kümeleri bulabilmektedir. Bu şekilde kısa programlar yazarak normal alt grup ve bölüm grubu kavramları için gerekli olan temel oluşturulmaktadır. G grubunun H alt grubunun normal alt grup olup olmadığını belirleyen bir "func" örneği aşağıdaki gibidir:

```
>   normal := func(G,o,H);
>>    return
>>    for all g in G: sag(H,g)=sol(H,g);
>>  end;
```

Özellikle değişmeli olmayan gruplarda, normal alt grup kavramının daha iyi oluşturulabileceği göz önünde bulundurularak, uygulamalarda S_3, S_4 gibi simetrik grup yapıları detaylı ele alınmıştır. Yan küme çarpımı için aşağıdaki gibi yazılan bir "func" kodu ise, kavramın oluşturulma sürecinde önemli bir adım olarak kabul edilmektedir.

```
>   oo := func(H,g);
>>   if x subset G and y subset G then
>>   return
>>    {a .o b: a in x and b in y};
>>  end;
>> end;
```

Bu kısa program ile öğrenciler, bir alt grubun iki sağ ya da sol yan kümesinin çarpımını hesaplayabilmektedir. Öğrencilerin bu programı yazarak, normal alt grup ile bölüm grubu arasındaki ilişkiyi görebilmeleri amaçlanmıştır. İki yan kümenin çarpımının yeni bir yan küme olmadığı durumlarda öğrenciler bunun nedenini bulmaya yönlendirilerek yan küme çarpımının kapalı olması için hangi şartları sağlaması gerektiğini araştırmışlardır. Yan küme çarpımının kapalı olması için alt grubun normal olması gerektiğini örneklerle bulan öğrenciler, yan kümelerin kümesinin bu çarpma işlemine göre grup olup olmadığını araştırmaya yönlendirilmişlerdir. Bunun için kayıtlı grup “func” kodundan yararlanarak yan kümeler kümesinin grup şartlarını sağlayıp sağlamadığını kısa yoldan test etmişlerdir.

Bölüm grubu, öğrenciler için yeni bir kavram olduğu için örnekler kolaydan zora doğru sıralanmış ve çözümlerin doğru ya da yanlış olmasına önem verilmemiştir. Öğrencilerin soruyu doğru çözmelerinden ziyade, kavramla ilgili uygulamalı bir temel oluşturmaları bilgisayar aktivitelerinin esas amacı olarak belirlenmiştir.

ACE döngüsünün sınıf aktiviteleri kısmında, öğrenciler kağıt kalem kullanarak bilgisayarda yaptıkları işlemleri tekrarlamışlardır. Bu aşamada kavramların asıl öğreniminin gerçekleşmesi amaçlanmıştır. Öğretici sınıfta, bilgiyi aktaran kişi olmaktan çok bilgiye yönlendiren kişi konumunda olmuştur (Dubinsky & Leron, 1994). Ev ödevleri kısmı ise, öğrencilerin kavramları pekiştirme noktasında önemli aşama kaydettikleri bileşeni oluşturmaktadır. Uygulama süreci tamamlandıktan sonra, deney ve kontrol grubu öğrencilerine ABT ve MTÖ son testler olarak uygulanmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

Veri analizinde, öncelikle, verilerin parametrik testler için gerekli varsayımları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmiştir. Bunun için de öncelikle; normallik ve varyansların homojenliği varsayımlarına bakılmıştır. Örneklem sayısı 50’den küçük olduğu için verilerin normal dağılıma uygunluğunu test etmek için Shapiro-Wilkis testi kullanılmıştır (Büyüköztürk, 2005). Analiz sonuçlarında deney ve kontrol gruplarına ait ön test ve son test puanlarının normal dağılımdan anlamlı sapma göstermediği ($p>0.05$), yani normallik varsayımını sağlandığı anlaşılmıştır.
Varyansların homojenliği varsayımını incelemek amacıyla yapılan Levene’s Testi sonucunda ise, $p>.05$’e göre puan dağılımına ait test varyanslarının homojen dağıldığı, yani homojenlik varsayımının sağlandığı sonucuna ulaşılmıştır. Varsayımların sağlanmasından sonra, deney ve kontrol grubunun ön test-son test başarı ve tutum ortalamaları arasındaki farkın test edilmesinde bağımsız gruplar için t- testi kullanılmıştır. Araştırmanın ön test ve son test sonuçları 0.05’lik önem seviyesinde test edilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin analizi için içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizinde birbirine benzeyen veriler, belirli kavramlar ve temalar etrafında bir araya getirilmekte ve okuyucunun anlayabileceği şekilde düzenlenerek yorumlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Görüşmelerin tamamlanmasının ardından veriler incelenerek kodlamalar oluşturulmuştur. Kodlama işleminden sonra kodlar bir araya getirilerek kullanılan ortak özellikler belirlenmiştir.

Araştırmanın güvenirliğini sağlamak için, belirlenen temalar ve bu temalara ait kodların uygunluğu bir kez de araştırmacı dışında ikinci bir kişi tarafından kodlanmış ve iki kodlama arasındaki tutarlılık hesaplaması Miles ve Huberman'ın (1994) formülü kullanılarak hesaplanmıştır.

Uzlaşma Yüzdesi = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) x 100

Miles ve Huberman'a (1994) göre uyum yüzdesinin en az %70 olması güvenirliğin sağlandığını göstermektedir. Bu çalışma sonucunda kodlamaların uygunluğu konusunda %79 oranında görüş birliğine varıldığından veri analizi açısından güvenirlik sağlanmıştır.

Deney grubu öğrencileri "D1, D2, D3, ...", kontrol grubu öğrencileri ise "K1, K2, K3, …" şeklinde kodlanmıştır. Öğrencilerin düşüncelerini yansıtan örnek ifadeler "tırnak" içinde sunulmuştur.

3. Bulgular

3.1. ABT ve MTÖ ile elde edilen bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yönteminin öğrencilerin normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin anlamalarında ve matematiğe karşı tutumlarında farklılık oluşturup oluşturmadığını belirlemek için yürütülen bağımsız gruplar için t- testi sonuçları Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Deney ve kontrol gruplarındaki öğrencilerin son test puanlarının karşılaştırılmasına ilişkin bağımsız gruplar t-testi sonuçları

Test	Grup	n	Ortalama	SS	t	p
ABT	Deney Grubu	15	47.24	9.15	3.25	.00
	Kontrol grubu	15	40.21	10.14		
MTÖ	Deney Grubu	15	128.44	12.48	2.54	.00
	Kontrol grubu	15	111.17	14.22		

Sonuçlar deney ve kontrol grubu öğrencilerinin, ABT ve MTÖ son test puan ortalamaları arasındaki farkın deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı olduğu göstermektedir. Bu bulguya göre, kontrol grubunda uygulanan mevcut öğretim programına göre, deney grubunda uygulanan bilgisayar destekli öğretim yönteminin akademik başarıyı artırmada ve matematik dersine yönelik olumlu tutumun geliştirilmesinde daha etkili olduğu söylenebilir.

3.2. Görüşmeler

Uygulama sonrası normal alt grup ve bölüm grubu kavramları ISETL programıyla ele alındıktan sonra deney ve kontrol grubu öğrencileri ile görüşmeler yapılmıştır. Bulgular; normal alt grup kavramının ön koşul kavramlarını tanımlama, normal alt grubu kavrama, bölüm grubu kavramının ön koşul kavramlarını tanımlama, bölüm grubunu kavrama ve ISETL ile normal alt grubu ve bölüm grubunu öğrenme üzerine öğrenci görüşleri şeklinde beş tema altında ele alınmıştır. Bu temalarda, öğrencilerin sahip oldukları anlama seviyeleri Dubinsky ve arkadaşları (1994) tarafından ortaya konan normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarına ilişkin genetik ayrışım temel alınarak belirlenmiştir.

3.2.1. Normal alt grup kavramının ön koşul kavramlarını tanımlama

İkili işlem, grup, alt grup, yan küme kavramları normal alt grup için ön koşul kavramlardır. Bu kavramlara ilişkin eylem seviyesinde anlamaya sahip öğrenciler belli bir formülü veya kuralı kullanarak matematiksel problemi çözmeye çalıştıklarından, henüz içselleştirme gerçekleşmemiştir. İkili işlem, grup, alt grup, yan küme kavramlarını süreç seviyesinde anlamaya sahip öğrenciler, kavramları içselleştirerek yaptıkları işlemler üzerinde tekrar tekrar düşünerek kısa yollar kullanabilirler. Nesne seviyesinde ise öğrenci bütünün farkına varmış, süreci derinlemesine kavramıştır. Örneğin deney grubunda nesne seviyesinde anlama düzeyine sahip öğrenciler, cebirsel yapıların özelliklerini doğru tanımlayabilmişlerdir:

“ $* : A\mathrm{x}A \to A$ fonksiyonuna A’da ikili işlem denir. $*$ işlemi, her $(x, y) \in A\mathrm{x}A$ sıralı çiftini bir tek z $\in A$ elemanına eşler.” (D2).

“Aynı küme üzerinde tanımlanan farklı ikili işlemlerin özellikleri de farklı olabilir” (D4).

“Bir grubun cebirsel özelliği bu gruptaki ikili işleme bağlıdır” (D5).

Kontrol grubundaki öğrencilerin genel olarak modüler ve değişmeli grupları eylem seviyesinde anladıkları görülmüştür. Bunla birlikte değişmeli olmayan S_3, D_3 gibi gruplarda grubun elemanlarını yazarken zorlandıkları ortaya çıkmıştır: Bunun en önemli nedeni ise; bir kümenin elemanlarının tüm permütasyonlarını bulabilme ve fonksiyonlarda bileşke işlemi yapabilme becerisi eksikliğidir.

Diğer yandan deney grubunda ISETL’de

$$S3 := \{\, [a, b, c]: a, b, c\ in\ \{1,2,3\} \mid \#\{a, b, c\} = 3\}$$

kümesi oluşturulduğunda $\{1,2,3\}$ kümesinin bütün permütasyonları elde edilmiş olacağından, öğrenciler S_3 simetrik grubunun elemanlarını somut bir şekilde inceleme fırsatı elde etmişlerdir. Bu da grup kavramını anlama seviyelerinin süreç aşamasında olduğunu göstermektedir.

Genel olarak bakıldığında her iki grupta da ön koşul kavramlar içinde öğrencilerin en çok yan küme kavramında zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Örneğin $\mathbb{Z}_{12}$ nin H alt grubunun yan kümelerini çeşitli yollarla bulan öğrenciler, kavramı farklı yapılandırdıklarını ortaya koymuşlardır. Aşağıda sırasıyla, yan küme kavramına ilişkin süreç ve nesne anlama seviyelerine sahip iki öğrencinin düşünceleri alıntılanmıştır:

"$\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0, 4, 8\}$ alt grubunun yan kümelerini bulurken grubun elemanlarını tek tek H alt grubunun elemanlarıyla toplarız: $0 + H = \{0, 4, 8\}, 1 + H = \{1 + 0, 1 + 4, 1 + 8\} = \{1, 5, 9\}, 2 + H = \{2 + 0, 2 + 4, 2 + 8\} = \{2, 6, 10\}, \ldots$" (K8)

"$\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0, 4, 8\}$ alt grubunun yan kümeleri; $0 + H = 4 + H = 8 + H, 1 + H = 5 + H = 9 + H, 2 + H = 6 + H = 10 + H, 3 + H = 7 + H = 11 + H$ şeklindedir." (D3)

Kontrol grubunda, $\mathbb{Z}_{12}$ nin H alt grubunun yan kümelerinin bulmakta zorlanmadıkları ancak toplamsal grup yerine başka grup örnekleri dikkate alındığında, yan küme kavramını eylem seviyesinde anlayan öğrencilerin (K1, K7) yanlış cevaplar verdikleri dikkat çekmiştir. Örneğin "$G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ grubunun $H = \{1,14\}$ alt grubunun yan kümelerini bulurken grubun bütün elemanları ile H nın elemanlarını çarparız. $1.H = \{1, 14\}, 2.H = \{2, 13\}, 3.H = \{3, 12\}, 4.H = \{4,\ 11\}, 5.H = \{5, 10\}, \ldots$" (K1) şeklindeki yanıtlarda öğrenciler G grubu yerine $\mathbb{Z}_{15}$ teki elemanları alarak yan kümeleri oluşturmak istemişlerdir.

Diğer taraftan, nesne aşamasında anlamaya sahip öğrenciler için (D7, D11, D13) yan küme kavramı; "grubun alt kümesi, grubun parçalanışı, yeni bir grup için yeni elemanlar" (D7) anlamını taşımaktadır.

3.2.2. Normal alt grubu kavrama

Dubinsky ve arkadaşlarının (1994) normal alt grup kavramına ilişkin genetik ayrışımı dikkate alındığında her iki gruptaki öğrencilerin anlama seviyeleri şu şekilde belirlenmiştir:

Normal alt grup kavramını eylem seviyesinde anlamaya sahip öğrencilerin (D1, K2, K3) "gruptan bir eleman seçerek sağ ve sol yan kümelerin oluşturulması" (K3) şeklinde öğrendikleri yönünde ağırlıklı bir yaklaşım izlenimi söz konusudur. Diğer yandan süreç seviyesinde anlamaya sahip öğrenciler için (D9, K4, K5, K6) normal alt grup kavramı; "G bir grup ve N, G nin bir alt grubu olsun. gN ve Ng kümeleri için $gN = Ng$ oluyorsa N ye G nin normal alt grubu denir. Yani N grubunun G de sağ ve sol yan kümeleri eşit ise N normal alt gruptur." (K6) olarak ifade edilmiştir. Ancak nesne seviyesinde anlamaya sahip öğrencilerin normal alt grupların özellikleri ile ilgili çıkarımlarda bulunduğu gözlenmiştir. "Grup değişmeli ise her alt grubu normaldir" (D2). "Bir grubun normal alt gruplarının kesişimi de normaldir" (D4).

Diğer yandan yapılan en yaygın hatalardan biri, normalliğin, grubun değişmeli olması ile eş tutulmasıdır. "Değişmeli her grubun alt grubu da normaldir. Grup değişmeli değilse normal alt grubu olamaz. Bu arada bir grubun normal alt grubu yoksa değişmeli değildir." (K5). Değişmeli olmayan grup örnekleri incelendiğinde, öğrencilerdeki bu kavram yanılgısının nispeten azaldığı görülmüştür.

Kavramı nesne aşamasında yapılandıran öğrenciler S_3 ve D_3 gibi zor gruplarda bile doğru yorumlamada bulunabilmişlerdir. Örneğin deney grubundan bir öğrenci A_4 alterne grubunun alt gruplarının normal olup olmadığını belirlerken şu yolu izlemiştir:

“$A_4 =$
$\{(1),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$
Şimdi bu grubun $V = \{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$ alt grubunun normal alt grup olduğunu bulabiliriz. Her $\alpha \in A_4$ ve her $\beta \in V$ için $\alpha^{-1}\beta\alpha$ permütasyonu β ile aynı uzunluktadır. Yani ya birim eleman ya da iki ayrık transpozisyonun çarpımıdır. A_4 teki ayrık transpozisyonların hepsi V’de olduğundan $\alpha^{-1}\beta\alpha \in V$ yazarız. $V \lhd A_4$” (D7).

3.2.3. Bölüm grubu kavramının ön koşul kavramlarını tanımlama

Yan küme, yan küme çarpımı ve normal alt grup kavramları bölüm grubu için ön koşul kavramlardır. Yan küme kavramına ilişkin anlaması eylem seviyesinde olan öğrencilerin yan küme çarpımında sonuca ulaşamadıkları görüşmelerde netleşen bir durumdur. $\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0,4,8\}$ alt grubunun yan kümeleri için yan küme çarpımını kolaylıkla hesaplayabilen kontrol grubu öğrencilerinin büyük çoğunluğu simetrik grup yapılarında işlemi yapamamışlardır. “$\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0,4,8\}$ alt grubunun yan kümeleri; $1,5,9$; $2,6,10$ şeklindedir. Bu yan kümeleri toplarken iki kümenin elemanlarını teker teker toplayarak yeni bir küme elde ederiz. Bunları toplarsak sırasıyla, $1+2=3, 1+6=7, 1+10=11, 5+2=7, 5+6=11, \ldots$” (K3)

Diğer yandan, “$\mathbb{Z}_{12}$ de $H = \{0,4,8\}$ alt grubunun yan kümeleri; $0+H=4+H=8+H, 1+H=5+H=9+H, 2+H=6+H=10+H, 3+H=7+H=11+H$ şeklindedir. Yani toplam 4 tane yan küme mevcut. $0+H, 1+H, 2+H, 3+H$ yan kümeleri. Bu yan kümeleri toplayabiliriz. H lerin önündeki sayıları toplamalıyız. $0+1=1$ olduğundan 1 ile başlayan yan küme aradığımız cevaptır. $1+1=2$ olduğundan 2 ile başlayan yan küme aradığımız cevaptır. $1+2=3$ ise 3 ile başlayan yan küme cevaptır. Yani $(0+H)+(1+H)=1+H$, $(1+H)+(3+H)=0+H\ldots$” (D2) şeklindeki ifadeler, iki yan kümenin çarpımında temsilcileri toplayarak işlem yapan deney grubu öğrencilerinin (D2, D3, D5, D6, D10) yan küme çarpımı kavramına ilişkin nesne seviyesinde anlamaya sahip olduklarını göstermektedir.

Görüşmelerde her iki gruptaki öğrencilerin normallik ile temsilcilerin çarpım metodu arasındaki ilişkiyi bilip bilmedikleri yoklanmıştır: “İki yan kümenin çarpımını yaparken en kolay yol aslında temsilcileri çarpmaktır. Ama bunun için H alt grubu normal olmalıdır. Çünkü a, b $\in G$ için, $Ha.Hb = H(aH)b = H(Ha)b = H.H.ab = Hab$ yazarız.” (K6, D7, D9, D13). Ancak normallik ile temsilcilerin çarpımı arasındaki ilişki hakkında fikir sahibi olmayan öğrenciler de bulunmaktadır. Kontrol grubundan bir öğrenci; “Yan küme çarpımında en kolay yol temsilcileri çarpmaktır. Her alt grubun yan kümesinde uygulanabilir bir yöntem…” (K2). şeklinde düşünmektedir. Bu durum normal alt grup kavramını eylem aşamasında anlayan öğrencilerin yaşadığı kavramsal yanılgılardan biri olarak değerlendirilmektedir. Diğer yandan deney grubunda öğrenciler ISETL yazılımında kendi matematiksel inşalarını oluşturduklarını, normal alt grup kavramını uygulama yaparak ve inşa ederek daha iyi öğrendiklerini belirtmişlerdir: “Başlangıçta normalliği iki kümenin eşitliği olarak düşünürken, ISETL de özellikle simetrik gruplarda işlem yaptıkça kavram ile ilgili ilginç şeyler keşfettim.” (D7). “ISETL de kavramı tanımlamak için yazdığımız kodların çok faydası olduğu düşünüyorum. Bir kere kısa programları yazmak için bile tanımı bilmek gerekli. Ayrıca çok fazla örnek çözdük. Bazen bizim tahminlerimizden farklı cevaplar elde ettik" (D2).

3.2.4. Bölüm grubunu kavrama

Bölüm grubu kavramının genetik ayrışımında grup, ikili işlem ve yan küme şemalarının koordinasyonu söz konusudur. Öğrencilerin genel olarak bölüm grubunun elemanlarının ne olduğunu, bu elemanların oluşturduğu küme üzerinde tanımlanan işlemi ve normal alt grup ile bölüm grubu arasındaki ilişkiyi anlamada zorlandıkları görüşmelerde ortaya çıkan bir durumdur. Diğer yandan ISETL yazılımının kullanıldığı öğrenme ortamında yapılan uygulamalardan sonra öğrencilerin bölüm grubunun elemanlarını ve bölüm grubu işlemini doğru tanımlayabildikleri belirlenmiştir: "N, G de normal alt grup ise bir kere sağ ve sol yan kümeler eşittir. Yani yan kümeleri alıp bir kümede topladığımızda bu küme G/N oluyor. İşlemi ise G den taşıyoruz. Yani a, b $\in G$ için, $aN,\ bN \in G/N$ oluyor. $(aN).(bN) = (a.b)N$ işlemi G/N nin işlemidir." (D6, D7, D12).

Öğrencilerden S_3 simetrik grubunun bir normal alt grubuna göre bölüm grubunu teşkil etmeleri istendiğinde bazı öğrencilerin özellikle yan kümeleri oluştururken hata yaptıkları belirlenmiştir. Ancak ISETL de oluşturdukları kodlar ve kısa programlar ile hem simetrik grup hem de bölüm grubu kavramını nesne seviyesinde anladıkları ortaya çıkmıştır.

"$S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ kümesi 6 elemanlı. $N = \{(1),(123),(132)\}$ alt grubu S_3 te normaldir. Çünkü $6/3 = 2$. İki yan küme var: $(1).N$ ve $(12).N$. Elemanları açıkça yazarsak…."(D8)

Öğrenci uzun hesaplamalar yapmadan, normal alt grup ve yan küme çarpımı özelliklerini kullanarak bölüm grubunu teşkil etmiştir. Bununla birlikte deney grubunda işlem tablosu yaparak bölüm grubunun elemanlarını daha somut bir şekilde ifade eden öğrenciler bulunmaktadır: "G grubunun mertebesini normal alt grubun mertebesine böldüğümüzde yan küme sayısı çıkıyor. Bölüm grubunun eleman sayısı bu yani. İşlem tablosunu yapmak burada kolay artık." (D4, D13).

3.2.5. ISETL ile normal alt grubu ve bölüm grubunu öğrenme üzerine öğrenci görüşleri

Görüşmeler detaylı incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin genel olarak soyut cebir dersini bilgisayar ortamında öğrenmenin daha zevkli ve öğrenme açısından daha etkili olduğunu düşündükleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin ağırlıklı olarak "kavramları kendi kendilerine yapılandırdıkları" düşüncesine yoğunlaştıkları görülmüştür: "Başlangıçta normalliği iki kümenin eşitliği olarak düşünürken, ISETL de özellikle simetrik gruplarda işlem yaptıkça kavram ile ilgili ilginç şeyler keşfettim." (D7). "Birim eleman ve ters eleman için programlama yapmak…Aslında çok öğretici. Önceden tanımlanmış olsalar bu kadar kalıcı olmazdı bence." (D8).

Bununla birlikte, ISETL'nin kavramlar arasındaki geçişleri ve ilişkileri görmeye yardım ederek kavramsal bir şekilde öğrenmeyi sağladığı görülmüştür: "Bu programla konular ve kavramlar arasındaki ilişkiyi öğrendim aslında. Yan kümenin ne anlama geldiğini öğrenmekle beraber nerede kullanıldığını da biliyorum. Aynı şey diğer tüm öğrendiğim kavramlar için geçerli.” (D6). “Soyut cebirde her bir kavram bir sonraki için gerekli. Birbiriyle bağlantılı bu kavramları ISETL’de oluşturabilmek ve bunlarla ilgili işlemleri yapabilmek bence dersi öğrenmektir. Bu dersi bu program sayesinde öğrendiğimi düşünüyorum.” (D9).

Diğer yandan, soyut kavramların bilgisayar ekranında adım adım inşa etmek bazı öğrenciler için “somut tecrübe”(D8) olmuştur. Programın en önemli avantajının “soyutluğu azaltma” özelliği olduğu dikkat çeken durumdur: “Zor grup yapılarını ekranda görmek, dersin soyut doğasından alıyor öğrenciyi bence.” (D11). “Kavramlar biraz olsun somutlaştı zihnimizde.” (D5). “İkili işlem, yan küme, normal alt grup ve bölüm grubu…ISETL, tüm bu kavramlar hakkında somut bir fikir veriyor bize.” (D12). “Kavramları öğrenmeden önce, onları somut olarak kavramak çok etkili bir yaklaşım.” (D8).

Bazı öğrenciler programlama yapmanın zor olduğunu düşünmüşlerdir: “Bu programları yazmak sıkıcı olabiliyor. Önceden tanımlanmış olsa daha verimli olabilirdi.” (D13).

Diğer yandan bazı öğrenciler de ISETL’de yazılan kısa programların kavramın tanımıyla birebir örtüştüğü için bu durumun bir avantaj olduğuna dikkat çekmişlerdir. ISETL kodlarının matematiksel sembollerle benzer olmasının, matematiğin sembolik dilini öğrenmede etkili olduğu düşüncesi birçok öğrenci tarafından vurgulanmıştır. “ISETL’de yazdığımız kodlar, tanımlarla aynı. Tanımı ezberlememize de yardımcı oluyor bu durum.” (D11). “ISETL de kavramı tanımlamak için yazdığımız kodların çok faydası olduğu düşünüyorum. Bir kere kısa programları yazmak için bile tanımı bilmek gerekli.” (D3). “ISETL’ de programları yazarken, matematiksel sembolleri öğrenmek için uygun bir öğrenme ortamı da oluşmuş oluyor.” (D4).

Öğrenciler ISETL’nin matematiğe yönelik tutumlarını olumlu yönde etkilediğini ve soyut cebir öğreniminde etkili bir öğrenme ortamı oluştuğunu belirtmişlerdir: “Bence bu programın matematikteki diğer programlardan bazı farkları var. Birincisi soyut cebir dersinde bir bilgisayar programı kullanmak çok derse motive etti beni. İkincisi programın kullanımı kolay olduğu için özgüven kazanıyor insan ve soyut cebiri yapabileceğine inanıyor.” (D3). “Yeni bir programla tanışmak çok güzel. Bilgisayar laboratuvarındayken arkadaşlarla yaptığımız fikir alışverişleri çok şey öğretti diyebilirim. Ama en önemlisi, ISETL’yi öğrenmekti. Başka derslerimiz içinde kullanılmalı.” (D11).

Programın kullanılabilirliği açısından görüşmeler incelendiğinde, öğrencilerin çoğunluğunun ISETL’nin kolay ve kullanışlı bir program olduğu konusunda hem fikir oldukları görülmüştür: “İlk zamanlar biraz zorlandığımı söylemeliyim. Ama kısa bir süre sonra programa alışmaya başladık galiba. Biraz da ezber kullandık aslında kodları yazarken. Ama kolay bir program kesinlikle.” (D4). “ISETL’yi öğrenmek kolay aslında. ISETL’de yazdığımız programlar ile matematiksel kavramlar ilintili olduğu için, ISETL kolay öğrenilebilir bir program.” (D6).

Bazı öğrenciler sınıf aktivitelerinden önce bilgisayar aktivitelerinde konu hakkında tanışmanın etkili bir yöntem olduğuna vurgu yapmışlardır: "Sınıftan önce bilgisayar laboratuvarında kavramları öğrenmeye çalışmak, ipuçları fikir üretmeye çalışmak çok doğru bir yöntem bence. Sınıfa geldiğimizde konu hakkında bilgi sahibi olduğumuzdan çok rahat öğrenebildik konuları." (D1, D8, D11).

ISETL aktiviteleri ile ilgili dikkat çeken önemli bir dezavantaj, öğrencilerin bilgisayar laboratuvarında geçirdikleri zamanı yeterli bulmamalarıdır. Öğrenciler çoğu zaman kavramlarla ilgili yeterince uygulama yapamadıklarını ve sürenin kısıtlı olduğunu dile getirmişlerdir. Bazı durumlarda ders dışı etkinlikler yaparak bilgisayar ortamında çalışmalara devam etmişlerdir.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Bilgisayar destekli soyut cebir öğretiminin, ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında öğrenim gören öğrencilerin başarı ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisinin araştırıldığı bu çalışmada, deney ve kontrol gruplarına uygulanan ABT ve MTÖ son test sonuçlarına göre ISETL programlama dilinin kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim yönteminin geleneksel öğretim yöntemine göre daha etkili olduğu anlaşılmaktadır. Araştırma kapsamında yapılan incelemelerde, deney grubunda öğrencilerin soyut, karmaşık ve aksiyomatik sistem üzerine kurulan kavramları deneysel işlem süresince daha somut algıladıkları ve kavramlarla başa çıkabileceklerine inandıkları görülmüştür. Özellikle kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde, matematiğin sembolik dilinin öğreniminde ve soyutlamanın indirgenmesinde ISETL programının önemli katkılar sağladığı görülmüştür. Bu konuda yapılan araştırmalar da benzer sonuçları ortaya koymaktadır (Clark, Hemenway, John, Tolias & Vakil, 1999; Konyalıoğlu, 2006; Leron & Dubinsky, 1995; Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Smith, 1997; Weber & Larsen, 2008). Ayrıca normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarının ön koşul kavramlarının yapılandırılmasında ve bunlar arasındaki ilişkilerin sağlıklı bir şekilde kurulmasında da ISETL' nin önemli rol oynadığı belirlenmiştir.

Çalışmanın bulguları görüşmelerdeki sorular açısından değerlendirildiğinde, deney ve kontrol grubu öğrencilerinin APOS teorisi bağlamında ele alınan anlama seviyelerinin farklılık gösterdiği ve deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine nazaran, daha ileri seviyede anlamalar gerçekleştirdikleri görülmüştür. Normal alt grup kavramına ilişkin anlamaları eylem seviyesinde olan öğrencilerin genellikle modüler gruplarda sağ ve sol yan kümeleri kolaylıkla teşkil edebildikleri belirlenmiştir. Bu aslında beklenen bir durumdur. Eylem kavrayışındaki bir öğrenci yan kümeleri teker teker hesaplamadan bir alt grubun normal olup olmayacağı ile ilgili yorumda bulunamaz ancak formül kullanarak hesaplamalar yapabilir. Bu nedenle bu anlama seviyesinde dışsal bir süreç yani formül ve kural bilgisi söz konusudur. Bununla birlikte kontrol grubunda eylem seviyesinde anlamaya sahip bazı öğrenciler, $G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ grubunun $H = \{1,14\}$ alt grubunun yan kümelerini bulurken grubun bütün elemanları ile H' nın elemanlarını çarpmak istemiş ancak G grubu yerine $\mathbb{Z}_{15}$ teki elemanları alarak yan kümeleri oluşturmak istemişlerdir. Bu durum literatürde başka çalışmalarda da (Dubinsky ve ark., 1994) rapor edilmiştir. Eylemden sürece geçişte, formüller ve kurallar tekrar tekrar düşünülerek, işlemler yinelenerek içselleştirmeye geçilmektedir. Bu nedenle normal bir alt grubun sağ ve sol yan kümelerinin eşit olması gerektiği bilgisi bu aşamada oluşmaktadır. Kontrol grubundaki öğrencilerin genel olarak normal alt grup kavramına ilişkin anlamaları eylem ve süreç seviyesindedir. Buna karşın deney grubundaki öğrencilerin birçoğunun bu kavramı, süreç ve nesne aşamasında yapılandırdıkları belirlenmiştir. Bu durum, deney grubu öğrencilerinin bilgisayar aktivitelerinde kullanılan ISETL programı vasıtasıyla yaşadıkları tecrübelerin, kavramı anlamlı öğrenmelerinde etkili olduğunu söylemektedir. Nitekim görüşmelerde bazı öğrenciler soyut kavramların bilgisayar ekranında adım adım inşa edilmesini "somut tecrübe", "soyutluğu azaltma" şeklinde nitelendirmişlerdir.

Diğer yandan bölüm grubu kavramına ilişkin anlama seviyeleri incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinin daha iyi performans sergiledikleri dikkat çekmektedir. Örneğin görüşmelerde her iki gruptaki öğrencilere normal alt grup ile yan kümelerin çarpım metodu arasındaki ilişki sorulmuştur. Deney grubundaki öğrenciler bu ilişkiyi bir ispat niteliğinde "İki yan kümenin çarpımını yaparken en kolay yol aslında temsilcileri çarpmaktır. Ama bunun için H alt grubu normal olmalıdır. Çünkü a, b $\in G$ için, $Ha.Hb = H(aH)b = H(Ha)b = H.H.ab = Hab$ yazarız." şeklinde açıklarken kontrol grubunda birçok öğrenci bu ilişkiyi göz ardı ederek, yan kümelerin elemanlarını teker teker çarpma yolunu seçmiştir. Bu durum normal alt grup kavramının eylem aşamasında anlaşıldığını göstermektedir. Her iki grupta anlama seviyelerinde ortaya çıkan bu fark, ISETL programı ile yürütülen bilgisayar destekli öğretim yönteminin bir sonucu olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla kavramın epistemolojik zorluğu da göz önüne alındığında; daha çok programlama yapma, örnek çözme ve tahmin yürütme imkanı veren ISETL ile zenginleştirilmiş bilgisayar aktivitelerinin geleneksel öğretim ortamına göre daha etkili olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

ISETL kodlarının matematiğin sembolik diline benzer oluşu, programın kolay kullanımında ve matematiksel tanım, ilişki ve bağıntıların hatırda tutulmasında deney grubu öğrencilerine önemli avantajlar sağlamıştır. Görüşmelerde birçok öğrencinin ISETL kodlarının matematiksel sembollerle benzer olmasının, matematiğin sembolik dilini öğrenmede etkili olduğuna yönelik görüşleri de bu sonucu destekler niteliktedir. Schubert, Gfeller ve Donohue'e (2013) göre, matematiksel kavramların anlaşılması, matematiksel kavramları ve süreçleri anlamlı kılmayı amaçlayan çeşitli temsillerin kullanılmasını gerektirir. Bu nedenle kavramların sembolik temsili, matematik öğrenme sürecinde ISETL'nin en önemli katkılarından biri olarak görülebilir.

Shilin'e (2014) göre, soyut cebir öğretiminde, öğrencilerin cebirsel teorileri formal olmayan bir şekilde öğrenmeleri için yöntemler bulmak önemlidir. Bu nedenle, grup teorisi öğretiminde programlamanın kullanılması, hem formal olmayan öğrenmeye katkıda bulunulması hem de öğrencilerin programlama becerilerinin geliştirilmesi açısından dikkate değerdir. Bu yaklaşımın alternatifi olarak ISETL'nin, bu süreçte kullanabilecek özel bir programlama dili olduğu görülmüştür. Bu çalışmada deney grubunda kavramların formal tanımları verilmeden, ISETL'de ipuçları ile tanıtılmasının öğrenciler için etkili bir öğrenme çevresi oluşturduğu düşünülmektedir.

Bununla birlikte deney grubundaki öğrencilerin ISETL programının kullanıldığı öğrenme ortamında ele alınan normal alt grup ve bölüm grubu kavramlarını doğru bir şekilde tanımlandığı ve bu kavramların birbirleri ile olan ilişkilerini açıklayabildikleri belirlenmiştir. Kavramsal bilginin oluşmasında kavramlar arasındaki karşılıklı geçişlerin ve ilişkilerin önemi göz ardı edilemez (Baki, 2008). Bu nedenle kavramsal öğrenmeyi güçlendirmesi bağlamında ISETL'nin önemli bir araç olabileceği, üzerinde durulması gereken bir durumdur.

Deney grubunda öğrencilerin soyut kavramları somut hale getirmek için çeşitli yollar geliştirmeye çalışmaları dikkat çekmiştir. Görüşmelerde de netleşen bu durum, katılımcıların ISETL'de daha çok program yazmaları ve bunu arkadaşları ile tartışmaları şeklinde kendini göstermiştir. İlk olarak Hazzan (1999) tarafından, lisans öğrencilerinin soyut cebir kavramlarını algılayışlarını açıklamak için geliştirilerek kullanılan "soyutlama seviyesinin indirgenmesi", öğrencilerin, derste karşılaştıkları yeni kavramlarla baş edebilmek ve onları zihinsel olarak erişilebilir hale getirmek için çeşitli yollar bulması esasına dayanan bir teoridir (Şenay ve Özdemir, 2014). Matematiksel bir hatayla sonuçlanan bir zihinsel süreç veya yanılgı olarak anlaşılmaması gereken "soyutlamanın indirgenmesi" konusunda alan yazında yoğun çalışmaya rastlanmıştır (Gordon, 1996; Hazzan, 2001; Konyalıoğlu, 2009; Nardi, 2000, Senechal, 1988). Bu çalışmalar resimler (Gordon, 1996; Konyalıoğlu, 2009; Senechal, 1988), diyagramlar ve tablolar (Nardi, 2000) yolu ile öğrencilerin soyut cebir kavramları ile başa çıkmasına yardım etmeyi amaçlamıştır. Bu araştırmada deney grubunda öğrencilerin soyutlama seviyesini indirgemede ISETL programını araç olarak gördükleri göze çarpmaktadır. Aksiyomatik sistem üzerine kurulan soyut tanımların ISETL de programlar yazarak oluşturulması, çoğu öğrenci için derste "somut tecrübe" elde etmek anlamına gelmiştir. Nitekim görüşmelerde ortaya çıkan bu durumu bir öğrenci şu ifadelerle özetlemiştir: "İkili işlem, yan küme, normal alt grup ve bölüm grubu…ISETL, tüm bu kavramlar hakkında somut bir fikir veriyor bize." (D14).

Soyut olmanın yanı sıra soyut cebir kavramları, yüksek düzeyde karmaşık yani anlaşılması ve kullanılması için koordine edilmesi gereken birçok öğeyi (Melhuish, 2015) içinde barındıran kavramlardır. Melhuish'a (2015) göre bu durum APOS terminolojisinde şemalara karşılık gelmektedir. Clark ve arkadaşları (1997), bir öğrencinin bir konuya ait şemasının, o konu ile başa çıkmak için çağırılan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların uyumlu bir topluluğu olduğunu savunmuşlardır. Yani üstü kapalı ya da açık bir şekilde konuyla bağlantılı tüm bilgileri, öğrencinin o konudaki şemasını oluşturmaktadır. Deney grubunda görüşmelerde gözlemlenen bu durum, öğrencilerin ileri derecede karmaşık yapıdaki kavramları öğrenmede ISETL'den yardım aldıklarını göstermektedir. Nitekim bir öğrenci; "Soyut cebirde her bir kavram bir sonraki için gerekli. Birbiriyle bağlantılı bu kavramları ISETL'de oluşturabilmek ve bunlarla ilgili işlemleri yapabilmek bence dersi öğrenmektir. Bu dersi bu program sayesinde öğrendiğimi düşünüyorum" (D12) şeklinde düşüncesini yansıtarak karmaşık ve bağlantılı kavramları öğrenmede programın önemini vurgulamıştır. Cetin ve Dubinsky'e (2017) göre matematiksel programlama dilleri; APOS'un önerdiği eylem, süreç, nesne ve şema yapılarını güçlendirmede kullanılan önemli araçlardır. Buna göre APOS zihinsel yapılarını güçlendirmede önemli rol oynayan matematiksel programlar, aynı zamanda karmaşık kavramları anlamlandırmada da etkin araç olabilmektedirler.

Deney grubundaki öğrencilerin matematik dersine yönelik tutumlarındaki olumlu gelişmenin, ISETL programının öğrencilerin ön bilgilerini kullanımına imkan vermesine, bu ön bilgileri kullanarak kendi kendilerine programlama yapmalarına ve klasik sınıf ortamından farklı bir ortamda dersin işlenişine bağlı olduğu düşünülmektedir. Programlama yaptıktan sonra yaptıklarının doğru olup olmadığına dair tahminler ve dönütün olumlu olup olmama düşüncesi öğrencilerde merak uyandırmıştır. Bu durumun öğrenmeyi güdülemede önemli bir etken olabileceği hatırda tutulmalıdır. Öğrencilerin tutumlarında olumlu yönde bir gelişme olması, ISETL programlama dilinin kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim yönteminin etkinliğini ortaya koymaktadır.

5. Öneriler

Soyut cebir öğretiminde teknoloji kullanımı ile ilgili çalışmalar, son 30 yıllık zaman diliminde gerçekleştirilmeye başlamıştır. Bu araştırmalar incelendiğinde genel olarak bilgisayar destekli/tabanlı öğretim yöntemlerinin kullanılmasının olumlu sonuçlar doğurduğu görülmektedir. Ancak elde edilen bulguların dikkatli değerlendirilmesi ve sınırlılıkların açık bir şekilde ortaya konması gerekmektedir. Araştırma bulgularına göre ISETL programının kullanıldığı bilgisayar destekli öğrenme ortamında dikkat edilmesi gereken hususlar şöyle sıralanabilir:

1. Kuramsal temelleri APOS'a dayanan bu çalışmada öğrencilere, bilgisayar aktivitelerinde kavramlarla ilgili bir tecrübe ve deneyim kazandırılmış ve kavramlara aşina olmalarına zemin hazırlanmıştır. Daha sonra sınıf aktivitelerinde kavramı bir bütün olarak özellikleri, nitelikleri ve diğer kavramlarla ilişkileri açısından yapılandırmaları sağlanmıştır. Bu bağlamda öğrenme sürecinde kullanılan programlama dili ile bu dilin dayandığı pedagojinin uyumluluk içinde olması etkili öğrenme ortamlarının oluşturulması için vazgeçilmez bir olgudur. Pedagojisiyle çelişen bir program, öğrenme etkinliklerini zenginleştirmek yerine daha da zayıflatabilmektedir.

2. Öğrencilerin yazılımla daha çok tecrübe kazanmasına olanak verilmeli ve bilgisayar aktivitelerinin saatleri artırılmalıdır. Ders dışı zamanlarda da öğrencilerin bilgisayar aktiviteleri yapmaları teşvik edilmelidir.

3. Bilgisayarlar, eğitim öğretim sürecinde kullanılırken öğrencilerin motivasyon gücünü azaltabilecek faktörlerin bertaraf edilmesi gerekir. Örneğin yazılımın kullanımı konusunda tecrübesiz olmaları ve adaptasyon eksiklikleri öğrencilerin derse yönelik tutumlarını olumsuz etkileyebilmektedir. Bu da öğretmene önemli görevler yüklemektedir. Öğrencinin adaptasyon sorunu yaşadığı durumlarda öğretmen devreye girerek verimi artırma yoluna gitmelidir.

4. Öğrenciler arasındaki iletişim ve yardımlaşmayı destekleyen unsurlara daha çok yer verilerek ders içi ve ders dışı grup çalışmaları artırılmalıdır.

Bu çalışma bilgisayar destekli öğretim yönteminin, öğrencilerin başarılarına ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisinin araştırıldığı, lisans düzeyinde yalnızca bir kurumda yürütülen bir çalışmadır. Bu yönüyle çalışmanın sınırlı olduğu ifade edilebilir. ISETL programının kullanıldığı daha büyük ve farklı özellikteki gruplarla gerçekleştirilebilecek nicel ve nitel farklı türde verilere dayalı tarama türündeki araştırmaların yapılmasının alana katkısının daha büyük olacağı düşünülmektedir. Ayrıca üniversite düzeyindeki diğer matematik dersleri için tasarlanan ISETL'nin kullanıldığı bilgisayar destekli öğretim ortamlarını öğrencilerin başarıları açısından karşılaştıran çalışmaların yapılmasının da ilgili alan yazına yararlı olacağı düşünülmektedir.

ISETL'de kısa programlar yazarak, soyut cebir kavramlarının yanı sıra birçok yüksek matematik kavramının oluşturulması ve kavrama ait zihinsel yapıların ortaya çıkarılması gerçekleştirilebilir. Bu sayede kavramlarla ilgili önkoşul kavramların neler olduğu, kavramlara ait öğrenmelerin nasıl gerçekleştiği ve kavramların yapılandırılmasında ne tür zorluklarla karşılaşılabileceği de tespit edilebilir. Papert'ın da (1980) dediği gibi, bilgisayarlar bir öğretme makinesi değil, öğrencilerin kendi programlarını yazarak entelektüel becerilerini geliştirdikleri bir araçtır. Öğrencilerin programlama yaparak bilgisayarların kendilerini yönlendirmelerine izin vermeden, bilgisayarı yöneterek bu becerileri elde etmelerine izin verilmelidir.

The Impact of Computer-Assisted Abstract Algebra Instruction on Achievement and Attitudes Toward Mathematics: The Case of ISETL

Extended Abstract

Introduction

Abstract algebra has emerged in the 19th century with the introduction of axiomatic systems in the process of solving problems such as number theory, geometry, analysis, solvability of polynomial equations and investigation of the properties of various number systems. It owes its existence largely to the failure of classical problems to be solved by classical methods (Kleiner, 2007). The concept of group is one of the milestones in the historical development of abstract algebra.

In addition to this milestone, the concepts of normal subgroup and quotient group also have an important place in abstract algebra. Research shows that the concepts of normal subgroup and quotient group are concepts which are difficult to understand in abstract algebra course (Brenton & Edwards, 2003; Leron & Dubinsky, 1995). For instance, the most important misconception about the concept of normal subgroup is the interpretation of normality as the commutativity. When things get worse with normality, it is seen that this situation will have a negative effect on the constructing of the concept of quotient group. In order to overcome these difficulties, for decades, researchers have been proposing various innovative approaches such as student-centered learning, collaborative learning, technology-supported learning methods. One of the most important approaches that allow the discovery of abstract algebra concepts by technology in the literature is computer-assisted/based abstract algebra teaching. In order to make the concepts in the abstract and axiomatic structure more concrete (Nwabueze, 2004), to facilitate transition to advanced mathematical thinking, to work on more difficult group structures and to focus on concepts rather than calculations (Blyth & Rainbolt, 2010; Cetin & Dubinsky, 2017; Kulich, 2000; Rainbolt, 2002), programs such as ISETL, GAP, MAPLE, MAGMA, Geometer's Sketchpad have been used as important learning tools in abstract algebra teaching. Therefore, this study examined the effectiveness of the ISETL mathematical programming language in the teaching of the concepts of normal subgroup and quotient group.

Method

In the research, a quasi-experimental research (non-equivalent control group pretest-posttest design) was used. The implementation was conducted with the traditional method in the control group, while it was conducted with in the learning environment prepared according to the ACE cycle in the experimental group. In the ACE cycle, traditional instruction is replaced with a sequence: computer laboratory, class meetings, and homework. ISETL programming language was used in the computer activities. In this activities, worksheets were distributed to the students. The concepts that are wanted to be taught are divided into small pieces and introduced without real definitions in the worksheets with short clues. In the class activities, students repeated the process they did on the computer using paper pens. At this stage, it is aimed to realize the main learning of the concepts. The instructor was the person who led the knowledge rather than the person who transferred the information in the classroom (Dubinsky & Leron, 1994). Homework, on the other hand, constitutes the component in which students make significant progress in reinforcing the concepts.

The sample of the study consisted of 30 third grade students studying in the same class in the elementary mathematics teaching program at a state university in Turkey. An experimental group and a control group were organized with 15 students each. Students were administered Academic Achievement Test (AAT) and Math Attitude Scale (MAS) as pre and post-tests. After the post-test data were collected, semi-structured interviews were conducted with the students in the experimental and control groups, and their level of understanding was determined according to APOS theory. Independent samples t-test was used in the analysis of the collected data and semi-structured interviews were analyzed by using content analysis.

Findings

The students in the experimental and control groups were asked to complete the AAT and the MAS at the beginning of the experimental process. The results showed there was no significant difference between two groups ($p > .05$). This result indicated that experimental and control groups were equal at the beginning of the study.

In the other hand, the results showed that the difference between the experimental and control group students' AAT and MAS post-test mean scores were statistically significant in favor of the experimental group after the treatment. Based on AAT post-test scores, semi-structured interviews were conducted with the students in the experimental and control groups. The students who had correct, partially correct and wrong answers to the AAT post-test were interviewed. The qualitative data revealed that the students in the experimental group exhibited higher levels of understanding compared to those in the control group.

Results

The result of the independent samples t-test showed a significant difference between the AAT and MAS post-test scores of experimental and control groups. In this context, it can be argued the use of ISETL programming language in abstract algebra teaching is more effective in increasing academic achievement and improving the positive attitude towards mathematics.

In line with this result, interviews showed that the experimental group students' understanding of the concepts of normal subgroup and quotient group is more advanced than the control group students. For example, in the interviews, the relationship between the normal subgroup and coset multiplication was asked to the students in both groups. While the students in the experimental group explained this relationship as a proof, many students in the control group ignored this relationship and preferred to multiply the elements of the cosets one by one. In the experimental group, it was observed that students tried to develop various ways to make abstract concepts concrete. Moreover, in the interviews, it was determined that students received help from ISETL in learning highly complex concepts. This indicates that the differences in attitudes and understanding levels in both groups were as a result of the computer-assisted teaching method implemented by ISETL program.

Kaynaklar/References

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S., & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 241-309.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Blyth, R. D., & Rainbolt, J. G. (2010). Discovering theorems in abstract algebra using the software GAP. *Primus*, *20*(3), 217-227.

Brenton, L., & Edwards, T. G. (2003). Sets of sets: A cognitive obstacle. *The College Mathematics Journal*, *34*(1), 31-38.

Büyüköztürk, Ş. (2005). *Sosyal bilimler için veri analizleri el kitabı*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Capaldi, M. (2014). Non-traditional methods of teaching abstract algebra. *Primus*, *24*(1), 12–24.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St John, D., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345- 364.

Clark, J. M., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G., & Vakil, R. (1999). Student attitudes toward abstract algebra. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studie*s, *9*(1), 76-96.

Cetin, I., & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavio*r, *47*, 70-80.

Çetin, İ. ve Top, E. (2014). Programlama eğitiminde görselleştirme ile ACE döngüsü. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(3), 274-303.

Duatepe, A. ve Çilesiz, Ş. (1999). Matematik tutum ölçeği geliştirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *16*, 45-52.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (2001). Using a theory of learning in college mathematics courses. *MSOR Connections*, *1*(2), 10-15.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational studies in Mathematics*, *27*(3), 267-305.

Dubinsky, E., & Leron, U. (1994). *Learning abstract algebra with ISETL*. New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1991). Constructing calculus concepts: Cooperation in a computer laboratory. In L. C. Leinbach (Ed.), *The laboratory approach to teaching calculus* (pp. 47-70). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & Tall, D. (2002). Advanced mathematical thinking and the computer. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 231-248). Dordrecht: Kluwer.

Fenton, W. E., & Dubinsky. E. (1996). *lntroduction to discrete matheuıatics with ISETL*. New York: Springer-Verlag.

Galois, E. (1831). Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *9*, 417–433.

Gilbert, W. (1976). *Modern algebra with applications*. New York: John Wiley & Sons.

Gordon, G. (1996). Using wallpaper groups to motivate group theory. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 6*(4), 355-365.

Grassl, R., & Mingus, T. T. Y. (2007). Team-teaching and cooperative groups in abstract algebra: Nurturing a new generation of confident mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 581–597.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 71–90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(2), 163–172.

Hirsch, J. (2008). *Tracking changes in teaching and learning abstract algebra: Beliefs and ability to abstrac*t (Unpublished doctoral dissertation). Colombia University, USA.

Hoffman, A. J. (2017). *Abstract algebra for teachers: An evaluative case study* (Unpublished doctoral dissertation). Purdue University, USA.

Ioannou, M., & Iannone, P. (2011). Students' affective responses to the inability to visualize cosets. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 81–82.

Kleiner, I. (2007). *A History of abstract algebra*. Boston: Birkhäuser.

Konyalıoğlu, S. (2006). A study on teaching group and subgroup concepts. *Journal of Qafqaz University*, *18*, 155-158.

Konyalıoğlu, S. (2009). Escher's tessellations in understanding group theory. *World Applied Sciences Journal*, *6*(11), 1521-1524.

Kulich, L. T. (2000). Ideas for teaching and learning: Computer algebra in abstract algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *7*(3), 213–219.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227-242.

Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 153-174.

Melhuish, K. M. (2015). *The design and validation of a group theory concept inventory*. (Unpublished doctoral dissertation). Portland State University, USA.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded source book* (2nd ed.). California: Sage Publications.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduates' responses to semantic abbreviations, "geometric" images and multi-level abstractions in group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 169–189.

Nicholson, J. (1993). The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia Mathematica*, *20*(1), 68-88.

Nwabueze, K. K. (2004). Computers in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(1), 39-49.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Computers and powerful ideas*. London: Harvester.

Quoc, N. A. (2018). An epistemological analysis of the concept of quotient group. *Tạp Chí Khoa Học*, *15*(5b), 139-152.

Rainbolt, J. G. (2002). Using GAP in an abstract algebra class. In A. C. Hibbard, & E. J. Maycock (Eds.), *Innovations in teaching abstract algebra* (pp. 77-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Schubert, C., Gfeller, M., & Donohue, C. (2013). Using Group Explorer in teaching abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(3), 377-387.

Senechal, M. (1988). The algebraic escher. *Structural Topology*, *15*, 31-42.

Shilin, I. A. (2014). Some programming problems for teaching foundations of group theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(3), 438-445.

Smith, R. S. (1993, November). *ISETL and cooperative learning-vehicles for learning calculus.* Paper presented at the Proceedings of the Fourth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Portland.

Smith, R. S. (1997). *A collaborative learning constructivist approach to abstract algebra using ISETL* (Unpublished master's thesis). Miami University, USA.

Şenay, Ş. C. ve Özdemir, A. Ş. (2014). Matematik öğretmen adaylarının lineer kongrüanslara ilişkin soyutlamayı indirgeme eğilimleri. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama*, *5*(10), 59-72.

Van der Waerden, B. L. (1939). Nachruf auf Otto Hölder. *Mathematische Annalen*, *116*(1), 157-165.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). Teaching and learning abstract algebra. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 137-149). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A., & Merkovsky, R. (2000). *An examination of student performance data in recent RUMEC studies*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Ek 1. Çalışma Yaprağı 3

1. Aşağıda ISETL'ye girmeniz için bir liste verilmiştir. Verileri girmeden cevabın ne olacağını tahmin edin. Cevabın tahmininizden farklı olduğu durumlarda nedenini araştırınız.

```
>    f:= func(x);
>>    return
>>    (x+3) mod 6;
>>  end;
```

```
>     f:= func(n);
>>    retrun  {1..n};
>> end;
```

```
>  Z9 := {0..8};
>  ters  := func (x);
>> return
>>  (x*g) mod 9=1;
>> end;
>  ters(1); ters(2); ters(6); 3* ters(3);
```

2. Aşağıda ISETL'ye girmeniz için bir liste verilmiştir. Verileri girmeden cevabın ne olacağını tahmin edin. Cevabın tahmininizden farklı olduğu durumlarda nedenini araştırınız.

```
>  Z20 := {0..19};
>  o:= func(x,y);
>>  return
>>   (x+y) mod20;
>>    end;
```

3. Aşağıda verilen açıklamalar ışığında bir ISETL "func" u tanımlayınız.

G, 1 den 6 ya kadar olan tamsayılar kümesi ve "o", iki değişkenin mod 7 ye göre çarpımları kuralıyla tanımlanan bir ikili işlem olsun. Tanımlayacağınız yeni "func" un input parametresi g olsun. "o" iişlemi altında g ile çarpımı 1 olan bir eleman seçiniz.

4. a. "func"un adı kapalilik olsun ve iki input parametresi olsun. Bir G kümesi ve "o" ikili işlemi. İşlemi Aktivite 2 deki gibi seçebilirsiniz. Kapali "func" unda G kümesinin iki elemanına “o” işlemi uygulandıktan sonra sonuç elemanının da G kümesinde olacağını tanımlayın.

b. “func”un adı degisme olsun ve iki input parametresi olsun. Bir G kümesi ve “o” ikili işlemi. İşlemi Aktivite 2 deki gibi seçebilirsiniz. Degisme “func” unda G kümesinin iki elemanına “o” işlemi uygulandıktan sonra elemanların yerini değiştirerek aynı işle uygulandığında sonuç elemanının her iki durumda da aynı olacağını tanımlayın.

c. “func”un adı birlesme olsun ve iki input parametresi olsun. Bir G kümesi ve “o” ikili işlemi. İşlemi Aktivite 2 deki gibi seçebilirsiniz. Birlesme “func” unda G kümesinin üç elemanını alalım. İlk iki elemana “o” işlemi uygulandıktan sonra sonuç elemanı üçüncü eleman ile “o” işlemine tabi tutalım. Aynı işlemi önce son iki elemana uygulayıp sonra sonuç elemanı diğer elemanla işleme tabi tutalım.

d. “func”un adı birim olsun ve iki input parametresi olsun. Bir G kümesi ve “o” ikili işlemi. İşlemi Aktivite 2 deki gibi seçebilirsiniz. Birim “func” unda G kümesinin tüm elemanlarıyla işleme girdiğinde o elemanları etkilemeyen bir “e” elemanını arayacaksınız. Böyle bir değer varsa ekrana gelecektir, aksi durumda “om” yanıtını alacaksınız.

e. “func”un adı ters olsun ve üç input parametresi olsun. Bir G kümesi ve “o” ikili işlemi ve G kümesinin bir elemanı. İşlemi Aktivite 2 deki gibi seçebilirsiniz. Ters “func” unda G kümesinin bir elemanı ile bu elemanın tersine işlemi uyguladıktan sonrasonucun birim eleman olacağını belirten bir “func” tanımlayın.

Çalışma Yaprağı 6

1. Aşağıda ISETL’ye girmeniz için bir liste verilmiştir. Verileri girmeden cevabın ne olacağını tahmin edin. Cevabın tahmininizden farklı olduğu durumlarda nedenini araştırınız.

```
>   sagyankume= func(H,g);
>>    return
>>    {h .o g: h in H};
>>  end;
```

2. Aynı programı sol yan küme için yazınız.
3. Bu aktivitede sizden istediğimiz aşağıdaki sorulara cevap vermenizdir:

a. Bu alt kümelerin her birinde kaç eleman bulunuz?
b. G grubunun seçtiğiniz H alt grubuna göre kaç yan kümesi (alt kümesi) vardır?
c. G grubunun hangi elemanları bu alt kümelerin birkaçında birden bulunur?
d. G grubunun hangi elemanları bu alt kümelerin hiçbirinde bulunmaz?

4. Aktivite 3'ü tamamladıktan sonra düşüncelerinizi yazın ve yan kümelerin genel özelliklerini bulmaya çalışın.

5. Aşağıda ISETL'ye girmeniz için bir liste verilmiştir. Verileri girmeden cevabın ne olacağını tahmin edin. Cevabın tahmininizden farklı olduğu durumlarda nedenini araştırınız.

a. $G = \mathbb{Z}_{24}$ ve H ise 6 ile doğrulan alt grubu.
b. $G = \mathbb{Z}_7 - \{0\}, H = \{1,6\}$
c. $G = \mathbb{Z}_{20}, H = \{0,5, 10, 15\}$
d. $G = S_3, H = \{(1), (12)\}$
e. $G = S_3, H = \{(1), (123), (132)\}$

6. Bu aktivitede yapmanız gereken hangi durumlarda sol ve sağ yan kümenin eşit olduğunu araştırmaktır. Her zaman mı? Bazen mi? 5. Aktivitenin d ve e şıklarına verdiğiniz cevap aynı mı?