İkinci Dereceden Fonksiyonların Öğrenilmesi Sürecinde Öğrencilerin Nicel Muhakemelerini Tetikleyen Bir Öğretim Dizisi *

Aytuğ Özaltun Çelik[a] ve Esra Bukova Güzel[b]

[a]Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Denizli/Türkiye (ORCID: 0000-0003-1310-3247); [b]Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İzmir/Türkiye (ORCID: 0000-0001-7571-1374)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 20 Temmuz 2018; Yayına kabul tarihi: 13 Kasım 2018; Çevrimiçi yayın tarihi: 16 Kasım 2018

Öz: Bu çalışmanın amacı ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde nicel muhakemeyi tetikleyen bir öğretim dizisi tasarlamaktır. Çalışma, döngüsel bir süreç olan tasarım tabanlı araştırma modeline dayandırılmıştır. Tasarı, uygulama ve analiz olacak şekilde üç aşamada gerçekleştirilen tasarım tabanlı araştırmanın uygulama aşaması iki ardıl döngüyü kapsamıştır. İlk döngü, öğretim dizisinin bir sınıf ortamındaki farklı öğrencilerin öğrenmelerini destekleyip desteklemediğini değerlendirmek amacıyla on öğrenci ile, ikinci döngü ise iki onuncu sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmadaki veri toplama araçları öğretim deneyleri boyunca alınan video kamera kayıtları, araştırmacı gözlem notları, öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar ve öğrencilerin yansıtıcı günlükleridir. Çalışmanın veri analiz sürecinde veri toplama süreci ile eş zamanlı bir şekilde sürekli karşılaştırmalı olarak devam eden analizler ve birinci ve ikinci döngülerin sonunda öğrencilerin nicel muhakemeleri bağlamında geriye dönük analizler yapılmıştır. Öğretim dizisindeki gerçek yaşam bağlamlı etkinlikler dinamik durumları içerdiği için öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri anlamlandırmalarına ve fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini oluşturmalarına imkan vermiştir. Matematik öğretmenlerinin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmelerini desteklemek amacıyla öğretim dizisini kendi sınıf ortamlarına uygun şekilde revize ederek kullanmaları önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: İkinci dereceden fonksiyon, mantıksal-matematiksel öğrenme etkinliği, matematiksel modelleme, nicel muhakeme, öğretim dizisi

DOI: 10.16949/turkbilmat.446403

Abstract: The purpose of this study is to design an instructional sequence triggering students' quantitative reasoning in the process of learning quadratic functions. The study was conducted as a design-based research, following a cyclical process. The study consisted of three phases of the design, implementation, and analysis phases and the implementation phase consisted of two consecutive cycles. While the first cycle was carried out to evaluate the success of the instructional sequence in supporting student learning in a class with ten 10th students, the second cycle was carried out with two 10th grade students. The video recordings taken during the teaching experiments, the researchers' observation notes, the clinical interviews, and the students' reflective journals constituted the data sources of the study. In the data analysis process of the study, the constant comparison method simultaneously conducted with the data collection process was used and also a retrospective analysis of the teaching experiments data was conducted after completing the cycles. Because the tasks were grounded in real-life contexts involving dynamic situations, they contributed to the students' understanding of functional relations and helped them construct the idea of covarying change in the functions. It is suggested that mathematics teachers revise and use the instructional sequence according to their own classroom context with the aim of supporting their students' understanding of quadratic functions.

Keywords: Quadratic function, logico-mathematical activity, mathematical modeling, quantitative reasoning, instructional sequence

See Extended Abstract

Sorumlu yazar: Esra Bukova Güzel **e-posta:** esra.bukova@deu.edu.tr

*Bu çalışma, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı olarak Prof. Dr. Esra Bukova Güzel danışmanlığında Arş. Gör. Dr. Aytuğ Özaltun Çelik'in yürüttüğü "İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme yollarının ve öğretim dizisinin tasarlanması" başlıklı doktora tez çalışmasının bir bölümünden oluşturulmuştur.

Kaynak Gösterme: Özaltun-Çelik, A, ve Bukova-Güzel, E. (2019). İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyen bir öğretim dizisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 157-194.

1. Giriş

Matematikçiler ve bilim insanları iki niceliğin değişimi fikri üzerine yıllardır düşünmelerine karşın önemli bir bilişsel eylem olan "*eş zamanlı değişim*" fikrinin nasıl kazandırılacağı ile ilgili problemlerle karşılaşmaktadırlar (Thompson, 2013). Sadece matematiğin içerisinde değil gerçek dünyada da birbiriyle bağlantılı olarak değişen birçok olgu ya da olayın varlığı düşünüldüğünde, eş zamanlı değişimin açıklanmasının matematiğin dışında diğer bilim dalları için de önemi ortaya çıkmaktadır. Bir nicelik değişirken bu niceliğe bağlı olarak oluşan yeni bir niceliğin değişimi bir başka deyişle eş zamanlı değişim fikri fonksiyon kavramının temelini oluşturmaktadır. Carlson ve Oehrtman (2005) fonksiyon kavramının üniversite matematiği ve modern matematik için temel olduğunu ve fonksiyon kavramına ilişkin güçlü bir anlamanın geleceğin bilim insanları, matematikçileri ve mühendisleri için önemli bir içeriğe sahip olan analiz dersinin anlaşılmasında gerekli olduğunu vurgulamaktadırlar. Matematik alanı içerisinde özellikle de cebir ve ileri düzey analiz için fonksiyonu kavramsal olarak anlamak öğrencilerin matematikte ilerlemelerini desteklemektedir. Birçok kavram ve fikirle ilişkili olan fonksiyon kavramını öğrenciler eş zamanlı değişim gibi nicel ilişkiler ve bu ilişkiler ile ilgili akıl yürüterek ilgili soyutlamaları gerçekleştirmeleri halinde öğrenebilmektedirler (Thompson, 1994). Benzer şekilde, Ellis (2011) alanyazında önemine vurgu yapılan *eş zamanlı değişim* fikrinin birbiriyle ilişkili niceliklerdeki değişimi göstermenin bir yolu olarak fonksiyon anlamını geliştirmede güçlü bir mekanizma olduğunu belirtmektedir. Fonksiyon kavramı öğretim programlarında ve öğretimde ele alınırken öğrencilerin eş zamanlı değişim fikrini anlamalarına, eş zamanlı değişimin çoklu gösterimlerine odaklanmalarına ve aynı fonksiyonun çoklu gösterimlerini vurgulayan farklı fonksiyon türlerini deneyimlemelerine fırsat verilmesi gerekmektedir (Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008).

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) cebir öğrenme alanına ilişkin standartlar kapsamında, öğrencilerin farklı fonksiyon sınıflarının özelliklerini keşfetmeleri için önemli deneyimler yaşamaları gerektiği (s. 299) vurgulanmaktadır. Bu fonksiyon sınıflarından biri polinom fonksiyonlar olup polinom fonksiyonlar ile ilgili ilk olarak öğrenciler doğrusal fonksiyonlar ve ikinci dereceden fonksiyonlar üzerine ayrıntılı incelemeler yapmaktadırlar. Doğrusal fonksiyonların ötesine uzanan ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrencilerin fikirleri ve düşünceleri onların fonksiyon aileleri boyunca ulaşacakları genellemelere bir ortam hazırlamaktadır (Ellis & Grinstead, 2008). İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramlar ve özellikler diğer fonksiyonların öğrenilmesinde öğrenciler için temel yapıtaşları olup bu fonksiyonların özelliklerine ilişkin anlamlar polinom fonksiyonların yanı sıra diğer yapıdaki fonksiyonlara da aktarılacaktır (Metcalf, 2007). Öğretim sürecinde genel olarak iki niceliğin eş zamanlı değişim fikrine ve aralarındaki ilişkilere odaklanmak yerine geleneksel bir bakış açısıyla ele alınan ikinci dereceden fonksiyon kavramının farklı gösterimleri birbirinden bağımsız olarak sunulmaktadır. Bu sebeple de öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyon kavramını anlamalarına yönelik çeşitli güçlükleri ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde, Kotsopoulos (2007) lise matematik öğrencilerinin müfredatın kavramsal olarak zorlayıcı yönlerinden birini ikinci dereceden ilişkiler olarak belirttiklerine değinmektedir. Matematik eğitimi alanyazında ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrencilerin anlamalarına (Ellis & Grinstead, 2008; Eraslan, 2007; Hohensee, 2016; Lobato, Hohensee, Rhodehamel & Diamond, 2012; Metcalf, 2007; Sevim, 2011) ve güçlüklerine (Eraslan, 2005; Mitchelmore & Cavanagh, 2000; Zaslavsky, 1997; Zazkis, Liljedahl & Gadowsky, 2003) ilişkin yürütülen çalışmaların sonuçları, öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlar ve doğrusal fonksiyonlar arasında uygun ilişkilendirmeler yapamadıklarını ve öğrencilerin zihinsel eylemlerinin öğrenmelerini sağlayacak şekilde olmadığını göstermektedir. Öğrenciler genel olarak ezbere dayalı bir öğretim sürecine dahil edildikleri ve ikinci dereceden fonksiyonları diğer fonksiyonlarla ilişkilendirmeden ayrı bir yapı olarak inceledikleri için zengin ve etkili düşünme süreçleri gerçekleştirememektedirler. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'na bağlı olarak 10. sınıfların matematik dersinde kullanılmak üzere hazırlanan kitapta (MEB, 2017) ikinci dereceden fonksiyonlar büyük oranda kurallara dayalı bir şekilde ele alınmış ve içeriği tanım, özellik ve uygulama şeklinde yapılandırılarak kavramsal anlama yerine işlemsel bilgi ön plana çıkarılmıştır. Kitapların hazırlanmasında temel alınan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2018) da ikinci dereceden fonksiyonlar ele alınırken değişim miktarlarının değişimi, değişim oranı ve iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile ilişkilendirmelere vurgu yapılmamaktadır. Bu kapsamda öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenirlerken doğrusal fonksiyonlarla ilişkilendirerek öğrenmelerine imkan vermek önemli hale gelmektedir. Nielsen (2015) doğrusal fonksiyonların karesini almayı gerektiren gerçek yaşam durumlarının modellenmesi ile ikinci dereceden fonksiyonların keşfedilip anlamlandırılabileceğini ifade etmektedir. Doğrusal fonksiyonu öğrenmiş olan öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları iki doğrusal fonksiyonun çarpımı fikriyle düşünmeleri fonksiyonun karakteristik özelliklerini anlamlandırmaları için fırsat verecektir. Bu sayede öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonlarda iki nicelik arasındaki ilişkiyi kavrayarak değişim oranlarının sabit olmadığını ve değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğu sonucuna ulaşabileceklerdir. Birçok araştırmacı (Ellis, 2011; Johnson, 2013; Lobato & Siebert, 2002; Moore, 2014; Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009; Oehrtman ve ark., 2008; Thompson, 1994) fonksiyonel ilişkilerde niceliklere değinmiş ve niceliklere ilişkin akıl yürütmenin bir başka ifadeyle nicel muhakemenin kavramların öğrenilmesinde önemli olduğunu dile getirmiştir. Bu doğrultuda, çalışmada öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenirlerken ilgili nicelikleri birbirleriyle ilişkilendirmelerini içeren nicel muhakemeler yaparak oluşturmaları için onlara anlamlı gelecek öğretim sürecinin gerekliliği göz önünde bulundurulmuştur. Ek olarak, öğrencilerin gerçek yaşam durumları üzerinde çalışırlarken deneyimlerine dayalı olarak ilgili nicelikleri ortaya çıkarmalarına ve matematiksel ilişkilendirmeler yapabilmelerine yönelik fırsatlar sağlamak dikkate alınmıştır.

Gerçek yaşam durumlarını içeren matematiksel öğrenme etkinliklerinin öğrencilerin yansıtıcı soyutlama yapmaları için zihinsel eylemlerini tetikleyeceği ve farklı kavramlar ve gösterimler arasındaki ilişkilendirmelerini destekleyeceği söylenebilir. Tasarlanan etkinliklerin öğrencilerin nicel muhakemelerini güçlendirmesi için onların öğrenme süreçlerine uygun şekilde sunulması gerekmektedir. Böyle bir tasarım sürecinin gerçekleştirilmesi deneysel araştırma yöntemlerinin ötesinde öğrencilerin öğrenme modellerini ortaya çıkaran ve aynı zamanda onların öğrenmelerini sağlayan tasarım tabanlı araştırmalarla mümkün olacaktır. Nielsen (2015) matematik eğitiminin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili ne anladıklarını derinlemesine odaklanan çalışmalara ihtiyacı olduğunu ifade etmektedir. Alanyazın incelendiğinde, ikinci dereceden fonksiyonlarının öğrenilmesinin önemine değinilmesine karşın, etkili öğretimi için yapılması gereken müdahalelerin net bir şekilde ortaya çıkarılmadığı belirlenmiştir. İkinci dereceden fonksiyon kavramını öğretmenlerin nasıl öğretmeleri gerektiğini anlamlandırmaları için onlara etkili öğretim perspektifleri sunacak bir öğretim dizisi tasarlanması gerekliliği görülmüş ve söz konusu bu çalışma ile bu ihtiyacın karşılanması sağlanmaya çalışılmıştır. Dolayısıyla öğrencilerin düşüncelerini ve öğrenme yollarını irdeleyerek onlara uygun bir öğretim dizisi geliştirmek ve bu öğretim dizisinin öğrencilerin zihinsel eylemlerini nasıl tetiklediğini analiz ederek düzenlemek ve alanyazına sunmak büyük önem taşımaktadır. Bu doğrultuda, söz konusu çalışmanın amacı ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde nicel muhakemeyi tetikleyen bir öğretim dizisi tasarlamaktır.

1.1. Kavramsal Çerçeve

İkinci dereceden fonksiyonlara yönelik öğretim dizisinin tasarlanmasında ve uygulanmasında matematiğin öğretilmesine ve öğrenilmesine ilişkin bazı perspektifler temel alınmıştır. Hem matematiği öğrenmeye hem de matematiği öğretmeye ilişkin bu perspektiflerde birbiri ile ilişkili olarak bilgiyi edinme kuramı olan *yapılandırmacılık* temel alınmıştır. Yapılandırmacı bilgi kuramı bakış açısında bilginin pasif bir şekilde alınmadığı, kişinin kendisi tarafından aktif bir şekilde oluşturulduğu ve bilişin işlevinin ontolojik gerçekliği keşfetmeyi değil deneyim dünyasını düzenlemeyi sağladığı vurgulanmaktadır (von Glasersfeld, 1989). Richard ve von Glarsersfeld (1980) ve von Glasersfeld'in (1981) de ifade ettikleri gibi bireyler eylemleri ve eylemlerinin yansımaları aracılığıyla kendi gerçeklerini oluşturmaktadırlar (akt. Steffe & Kieren, 1994). Konold ve Johnson (1991) Piaget'in yansıtıcı soyutlama yapısının matematiksel düşüncenin gelişimine yönelik yapılandırmacılık bilgi kuramına dayalı gerçekleştirilen uygulamalarda önemli bir rol oynadığını ifade etmektedirler. Thompson (1991) yapılandırmacılık bilgi kuramında, yansıtıcı soyutlamanın uyumsama mekanizmasının aracı ve bu sebeple de öğrenmenin aracı olduğunu dile getirmektedir. Çalışmada öğrencilerin öğrenme süreçleri *yansıtıcı soyutlamaya* dayandırılarak, ikinci dereceden fonksiyon kavramını öğrenme aşamalarında özümseme ve/veya uyumsama ile oluşturdukları kavramsal yapılara odaklanılmıştır. Oluşturulan kavramsal yapıların birbiriyle ilişkilendirilerek geliştirilmesinde öğrencilerin kendi zihinsel süreçlerinin yönlendirici olduğu ve öğrencilerin matematiğinin araştırmacıların matematiğinden farklılaşabileceği bakış açısı göz önünde bulundurulmuştur. Bu bakış açısına dayalı olarak, öğrencilerin etkinliklerin içerisine gömülen kavramlara ve fikirlere ulaşıp ulaşamadıklarını ortaya çıkarmak odak noktası olarak ele alınmamaktadır. Önemli olan öğrencilerin bu süreçte hangi fikirlerinin ortaya çıktığını belirlemek ve gerçekleşen zihinsel eylemlerinin hangi anlamalarının sonucu olduğunu ve hangi anlamalara yön verebileceğini kanıtlarıyla sunmaktır.

Öğrencilerin süreç boyunca ileri sürdükleri fikirler tüm öğrenciler için aynı olmayıp değişkenlik göstermesi olası bir durumdur. Bununla birlikte öğrencilerin bu fikirleri onların kavramlara ilişkin anlamalarını gösteren bir modeldir. Çalışmada da ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin tasarlanan öğretim dizisine katılan öğrencilerin düşünme süreçlerini gösteren modeller ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Amerikan Ulusal Araştırma Konseyi (National Research Council [NCR], 2007) çocukların bir konuyu öğrendikçe ve o konu üzerinde çalışmalar yaptıkça konu ile ilgili birbirini izleyen ve birbirine dayanan düşünme yollarının varlığına dikkat çekmektedir. Öğretmenlerin öğrenci anlamalarının modeli olan düşünme süreçlerini dikkate alarak öğretimlerini planlamaları kavramların yapılandırılmasını destekleyecektir. Öğrenci düşüncelerinin ve anlayışlarının öğrenme etkinlikleri bağlamında nasıl gelişeceğine ilişkin bir tahmin ile birlikte öğrenme hedefi ve öğrenme etkinlikleri olmak üzere üç bileşenden oluşan *varsayımsal öğrenme yolu* [hypothetical learning trajectory] (Simon, 1995) çalışma kapsamında tüm öğretim sürecinin tasarlanmasında belirleyici bir yapı olmuştur. Öğrencilerin varsayımsal öğrenme yolu doğrultusunda yansıtıcı soyutlamalarla kavramları oluşturmaları için öğretmenlerin bazı araçlardan yararlanmaları gerektiğini ifade eden von Glasersfeld (2002) bunun bir yolunun öğrencileri düşündükleri üzerine konuşturmak olduğunu vurgulamıştır. Bu süreçte öğrencilere anlamlı gelen problem durumları sunmak onların fikirler üretmelerini ve bu fikirler üzerine konuşmalarını desteklemektedir. Öğrenciler kendilerine sunulan matematiği ancak zihinlerinde canlandırdıkları ve anlamlar yükledikleri etkinlikler yoluyla yaparak yaşayarak öğrenebilmektedirler (Baki, 2018). Bu doğrultuda öğretim dizisindeki etkinlikler *Gerçekçi Matematik Eğitimi* (Realistic Mathematics Education [GME]) teorisine dayalı olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreçleri doğrultusunda daha önceden deneyimlemiş oldukları ya da deneyimlemeseler bile anlamlar yükleyebilecekleri gerçek yaşam durumlarını içerecek şekilde tasarlanmıştır. GME bakış açısına göre matematiği bir insan aktivitesi olarak düşünen Freudenthal matematiğin gerçekliği matematiksel hale getirerek bir başka deyişle matematikselleştirerek öğrenilmesi gerektiğini düşünmüştür (van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Treffer (1987) matematikselleştirmeyi, öğrencilerin gerçek yaşam problemini düzenlemek ve çözmek için matematiği kullandığı yatay matematikselleştirme ve gerçek yaşam bağlamında ulaşılanları matematiksel sistem içerisinde yeniden düzenlediği dikey matematikselleştirme olarak ikiye ayırmıştır (akt. van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Çalışmanın uygulama aşamasında öğrencilerin gerçek yaşam bağlamlarını incelemeleri ve bu durumları sistematik hale getirerek matematiksel kavramlarla ilişkilendirmeleri beklenmiştir. İlişkilendirdikleri fikirler ve kavramlardan yararlanarak gerçek yaşam bağlamını matematiksel olarak açıklamaları teşvik edilmiştir. Sonrasında oluşturdukları matematiksel modelleri değerlendirerek bağlamın ötesinde matematiksel genellemelere ulaşmaları istenmiştir. Gerçek yaşam durumları öğrencilerin hiç bilmedikleri durumlar ve kavramlara ilişkin zihinsel eylemlerini tetiklediği için öğrencilerin öğrenmelerini destekleyeceği düşünülmektedir.

Öğrencilerin belirlenen gerçek yaşam durumlarının modellerini oluşturma sürecinde aktif bir zihinsel katılım sağlayarak nicel muhakemelerinin destekleneceği varsayılmıştır. Bu sürece uygun etkinlikler tasarlanırken öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyerek yansıtıcı soyutlama yapmalarını destekleyen *mantıksal-matematiksel yapılar* göz önünde bulundurulmuştur. Simon (2006) öğretimsel tasarım bağlamında yansıtıcı soyutlama için amaca yönelik etkinlik yapısına vurgu yapmakta ve bu mantıksal-matematiksel etkinliklerin hem zihinsel hem de fiziksel etkinlikleri içerdiğini ifade etmektedir. Çalışmada bu yapıya dayalı olarak tasarlanan etkinliklerin her bir adımında öğrencilerin deneyimledikleri durumların ve bu sayede oluşturdukları zihinsel yapıların bir sonraki adımdaki fikirlerini oluşturmaları için önemli olduğu düşüncesi ön planda tutulmuştur. Bu sebeple, öncelikle öğrencilerin etkinliklerdeki fikirlere ilişkin belirli durumlara ve örneklere yönelik sonuçlar çıkarmaları, ardından belirli bir duruma özgü olmadan genel olarak fikirlere ve kavramlara ilişkin çıkarımlar ve genellemeler yapmaları beklenmiştir. Bununla birlikte, etkinliklere gömülen fikirlerle öğrencilerin nicel muhakeme gerçekleştirmeleri ve kavramlara ilişkin fikirlerini oluşturmaları desteklenmiştir.

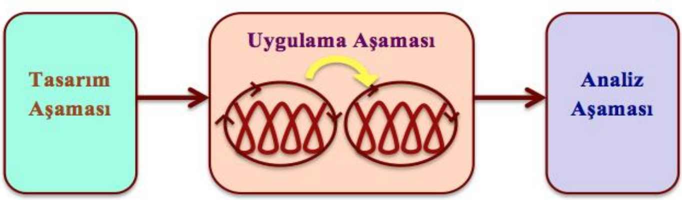
Thompson (1990) *nicel muhakemeyi*, bir durumu nicelikler ve nicel ilişkiler ağı olan nicel bir yapı içerisinde analiz etme olarak tanımlanmaktadır. Weber, Ellis, Kulow ve Ozgur (2014) de nicel muhakemeyi matematiksel bir durumu anlayan, duruma ilişkin nicelikleri oluşturan, problem durumunu anlamlı hale getirmek için bu nicelikleri ilişkilendiren, düzenleyen ve kullanan bir öğrencinin zihinsel eylemlerini tanımlamanın bir yolu olarak açıklamaktadırlar. Ortak Temel Eyalet Standartları Açılımı (2010) (The Common Core State Standards Initiative [CCSSI], öğrencilerin problem durumlarındaki nicelikleri ve ilişkileri anlamlandırmaları gerektiğini ifade ederek nicel muhakemeyi gerekli bir matematiksel uygulama olarak tanımlamıştır. Bu bağlamda öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonu anlamaları için kavramın içerdiği niceliklere ilişkin anlayışlarının kritik olduğu ve öğretmenlerin öğrencilerinin zihinlerindeki nicelikleri fark etmelerinin gerekli olduğu söylenebilir. Öğrencilerin matematiksel kavramları oluştururlarken ve yorumlarlarken ilgili durumlardaki niceliklere ilişkin sahip oldukları anlamlar ve gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler bir başka deyişle nicel muhakemeleri onların öğrenmelerini belirleyen temel etkendir. Moore ve arkadaşları (2009) öğrencilerin nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkileri ve eş zamanlı değişim fikrini kavramsallaştırdıkları bilişsel süreçlerinin onların muhakemeleri ile ilgili önemli bilgiler sunduğunu açıklamaktadırlar. Bu çalışmada ikinci dereceden fonksiyonların öğretim dizisi tasarlanırken ve öğrencilerin uygulamalar boyunca gelişen anlamaları değerlendirilirken nicel muhakeme yapısı temel alınmıştır. Etkinlikler tasarlanırken ele alınan kavramların öğrenilmesi için hangi niceliklerin ele alınması ve öğrencilerin hangi nicel operasyonları gerçekleştirmeleri gerektiği belirlenmiştir. Thompson (1990) bir nicelikten yeni bir nicelik elde etme sürecinde iki nicelik arasında gerçekleştirilen zihinsel eylemleri nicel operasyon olarak ifade etmektedir. İkinci dereceden fonksiyon kapsamında öğrencilerin değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu fark edebilmeleri, simetri ekseni, tepe noktası gibi önemli nicelikleri oluşturabilmeleri ve ikinci dereceden fonksiyonun farklı gösterimlerini ilişkilendirebilmeleri için

- eş zamanlı değişim ve eşleme fikrine dayalı çarpımsal karşılaştırma,
- fonksiyonun grafiğinin noktalarını eşleme ve bir eksen doğrultusunda grafiği katlama,
- aynı yüksekliğe sahip noktaların simetri eksenine olan uzaklıklarını toplamsal karşılaştırma ve noktaları aralarındaki uzaklıkları koruyarak taşıma

gibi nicel operasyonlar göz önünde bulundurulmuştur. Bu sayede ikinci dereceden fonksiyonların öğretiminde yararlanılabilecek etkinliklerin içeriği ayrıntılandırılmıştır. Etkinliklerin uygulanması aşamasında da öğrencilerin hangi nicel operasyonları gerçekleştirdikleri, hangi nicelikleri oluşturdukları ve gerçekleştirdikleri nicel muhakemeleri doğrultusunda anlamalarının modelleri ortaya çıkarılmıştır.

2. Yöntem

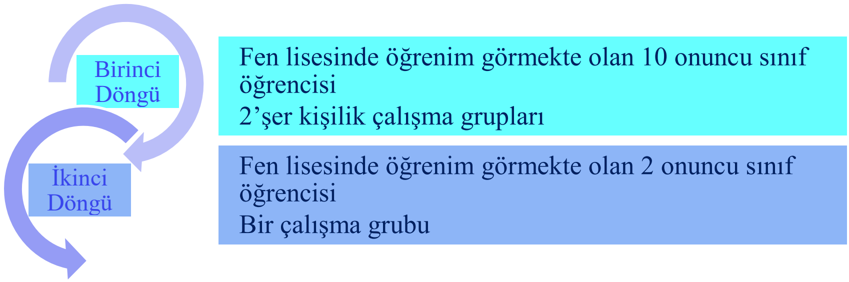
İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesine ilişkin GME'yi temel alan ve öğrencilerin nicel muhakemelerini destekleyerek olası güçlüklerinin önüne geçen bir süreci içeren yeni bir öğretim dizisinin geliştirilmesinin amaçlandığı bu çalışma bir tasarım tabanlı araştırmadır. Tasarım tabanlı araştırma sistematik bir tasarı ile öğrenmenin ve öğretimsel stratejilerin ve araçların incelenmesi için geliştirilen ve döngüsel bir süreci içeren paradigmadır (Design-Based Research Collective [DBRC], 2003). Nicel muhakemeyi destekleyerek kavramsal öğrenmeyi sağlayan ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin bir öğretim modelinin mevcut alanyazın kapsamında var olmaması sebebiyle, farklı gruplar arasındaki değerlendirmelerin gözden geçirilerek öğretim dizilerinin revize edilmesinin önemli olduğu düşünülmüştür. Bu amaçla ve döngüsel bir süreç olması sebebiyle tasarım tabanlı araştırma modeline gerek duyulmuştur. Ek olarak, hem öğretim dizisinin ortaya çıkarılması hem de öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarını gösteren modelleri gerçek yaşam bağlamlı etkinlikler boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel eylemlerinin incelenmesi ile daha etkili bir şekilde ortaya çıkarılabileceği düşünüldüğü için bir tasarım tabanlı araştırmanın gerçekleştirilmesine karar verilmiştir. İki ardıl döngüde gerçekleştirilen araştırma süreci Stephan (2015) ve Gravemeijer ve Cobb (2006) tarafından ifade edilen tasarım tabanlı araştırma yaklaşımları bütünleştirilerek, tasarım, uygulama ve analiz aşaması olmak üzere üç bölümde açıklanmaktadır (Bkz. Şekil 1). Tasarım aşamasında, literatür taraması ve kavramsal analiz yapılarak öğrenme ve öğretme perspektifleri altında öğretimsel sıra tasarlanmakta ve varsayımsal öğrenme yolları belirlenmektedir. Uygulama aşamasında hazırlanan öğretim dizisi uygulanmakta, sürekli devam eden analizler doğrultusunda öğrencilerin düşünceleri ve öğrenme yolları değerlendirilmekte ve gerekli revizyonlar yapılmaktadır. Analiz aşamasında ise, geriye dönük olarak öğretim dizisi analiz edilmekte ve ortaya koyulan öğretimsel teori ve revizyonlar göstergeleriyle sunulmaktadır.



Şekil 1. Çalışmadaki tasarım tabanlı araştırmanın üç aşaması

2.1. Çalışma Grubu

Çalışmanın ardıl iki döngüsü iki ayrı katılımcı grubu ile gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 2).



Şekil 2. Tasarım tabanlı araştırma kapsamında gerçekleştirilen ardıl döngülerin katılımcıları

Birinci döngü kapsamında gerçekleştirilen öğretim deneyleri 2015-2016 öğretim yılının Ocak-Şubat-Mart aylarında bir fen lisesinin seçmeli matematik dersine kayıtlı onuncu sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Uygulamanın yürütüldüğü okulun fen lisesi olarak seçilmesinin nedenleri şu şekilde söylenebilir: Çalışmanın felsefi bakış açısı doğrultusunda, öğrencilerin yeni bir kavramı öğrenebilmeleri için kavrama ilişkin ön kavramları öğrenmiş olmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda diğer okullardaki öğrencilerle karşılaştırıldığında, fen lisesi öğrencilerinin ön bilgilerinin daha güçlü olduğu varsayımı fen lisesinde öğrenimi sürdürmekte olan onuncu sınıf öğrencilerinin çalışma grubu olarak belirlenmesinde etkili olmuştur. Tasarlanan etkinliklerin farklı disiplinlerdeki içerikleri kapsayan matematiksel modelleme etkinlikleri olması da fen lisesi öğrencilerinin seçilmesinde bir diğer etken olmuştur. Öğrencilerin tasarlanan gerçek yaşam bağlamlı etkinlikleri uygulayabilmeleri ve modellere dayalı olarak yansıtıcı soyutlama yapabilmeleri için matematiksel modelleme sürecine kısa süre içerisinde uyum sağlayabilmeleri ve fizik, kimya gibi içerikleri olan etkinliklere ilişkin kolaylıkla akıl yürütebilmeleri önemliydi. Bu bağlamda, fen lisesi öğrencilerinin matematiksel modelleme sürecine daha hızlı adapte olabilecekleri düşüncesi seçimi etkilemiştir. Fen lisesindeki onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin formal bir öğretim sürecine dâhil olmamaları da ölçütlerden biri olmuştur. Amaçlı örnekleme türlerinden ölçüt örnekleme yönteminin yanı sıra kolay erişilebilirlikte dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda araştırmacıların çalıştığı üniversiteye yakın olan bir fen lisesi seçilmiştir. Çalışma grubunu ise haftada 2 ders saati olarak ders programında yer alan seçmeli matematik dersini seçen üçü kız, yedisi erkek olmak üzere 10 öğrenci oluşturmuştur. Öğretim dizisinin bir sınıf ortamında gerçekleştirilmesiyle birden fazla onuncu sınıf öğrencisine ulaşarak farklı anlamaları değerlendirmek, bu doğrultuda öğrenme sürecinin ve etkinliklerin nasıl olduğunu ve öğrenci gruplarının ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarının gelişiminin bu süreç ile nasıl desteklendiğini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. İki araştırmacı tarafından her bir grubun fikirlerinin etkili bir şekilde sorgulanabilmesi açısından öğrenci sayısının 10 ile sınırlı olması önemli olmuştur. İkinci döngü, 2016-2017 eğitim-öğretim yılının ara tatilinde farklı bir fen lisesinin onuncu sınıfında öğrenimini sürdürmekte olan iki öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. İlk döngü kapsamında öğretim dizisinin bir sınıf ortamında gerçekleştirilmesiyle birden fazla onuncu sınıf öğrencisine ulaşarak farklı anlamaları değerlendirmek, bu doğrultuda öğrenme sürecinin ve etkinliklerin nasıl olduğunu ve öğrenci gruplarının ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarının gelişiminin bu süreç ile nasıl desteklendiğini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. İlk döngüye dayalı olarak revize edilen öğretim dizisinin iki öğrenciye uygulanmasının amacı, onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik tasarlanan öğrenme etkinlikleri kapsamındaki kavramlara ilişkin anlamalarını ve düşüncelerini daha ayrıntılı bir şekilde analiz etmektir. Ek olarak, ölçme ve değerlendirme etkinliklerini klinik mülakatlarla uygulayarak öğrencilerin öğrenme süreçlerinde ulaştıkları anlamaların nasıl olduğunu derinlemesine inceleyerek zihinsel eylemlerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

2.2. Uygulama Süreci

Araştırmanın tasarım aşamasında ilk olarak, öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreçlerini belirleyebilmek amacıyla kavramsal analiz kapsamında doğrusal fonksiyonlara ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin alanyazın taraması yapılmıştır. Alanyazın taramasında doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyon kavramlarının ilişkili olduğu fikirleri ve kavramları, zamana bağlı depodaki su miktarının değişimi gibi gerçek yaşamda içerisinde bulunduğu durumları, değişim oranını fark edememe gibi kavramlara ya da niceliklere yönelik öğrencilerin karşılaşabilecekleri güçlükleri, parabolün eğiminin olabileceği gibi öğrenme süreçlerindeki yanlış anlayışları, kavramların öğretimleri sırasında öğretmenlerin farklı yaklaşımları ve bu yaklaşımlar doğrultusundaki öğrenci öğrenmeleri gibi hususları açıklayan ve örnekleyen araştırmalar ve farklı ülkelerin öğretim programları incelenmiştir. Ardından, bir matematik öğretmeninin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğretimi gözlemlenmiştir. Bu çalışmalara dayalı olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin nicelikleri ve kavramları öğrenebilecekleri sırayı gösteren ilk varsayımsal öğrenme süreci oluşturulmuştur. Oluşturulan varsayımsal öğrenme sürecine ilişkin fikirlerinin ne olduğunu, ikinci dereceden fonksiyonların öğretimini nasıl gerçekleştirdiklerini, bu süreçlerde öğrencilerinin karşılaştıkları güçlüklerin ve kolaylıkla anlamlandırdıkları kavramların neler olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla yaklaşık 14-15 yıllık deneyime sahip dört matematik öğretmeni ile görüşme yapılmıştır. İkinci dereceden fonksiyon kavramının öğretimi ve bu süreçlerdeki farklı öğrenci eğilimlerini birçok kez deneyimlemiş olan öğretmenlerin görüşlerinin varsayımsal öğrenme sürecinin geliştirilmesinde önemli olduğu düşünülmüştür. Taslak olarak hazırlanan varsayımsal öğrenme sürecine yönelik son sınıf matematik öğretmeni adaylarıyla da görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının matematik öğretimine yönelik dersleri tamamlamaları, bu dersler kapsamında lise matematik öğretim programını incelemeleri, okul deneyimi dersi kapsamında farklı öğretmenlerin derslerini ve bu derslerdeki öğrencileri gözlemlemeleri nedeniyle varsayımsal öğrenme sürecine yönelik fikirlerinin önemli olacağı düşünülmüştür. Son olarak, bir anadolu lisesindeki on birinci sınıf öğrencisinin ikinci dereceden bir fonksiyonu analiz edip grafiğini çizerken zihninde oluşan kavramları ve bu kavramlara ilişkin düşüncelerinin altında yatan sebepleri ortaya çıkarmak amacıyla öğrenciye "$f(x) = x^2 + 2x - 3$ nasıl bir fonksiyondur? Bu fonksiyonun grafiğini çizmek istesen nasıl bir yol izlersin?" sorusu sorulmuş ve bu soruyu yanıtlarken öğrencinin düşüncelerini anlamak amacıyla klinik mülakat yönteminden yararlanılmıştır (Özaltun-Çelik & Bukova-Güzel, 2017). Yapılan bu araştırmalar doğrultusunda onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreci revize edilmiştir.

Belirlenen bu varsayımsal öğrenme sürecine yönelik öğretim dizisi kapsamındaki gerçek yaşam bağlamlı etkinlikler çalışmanın kavramsal yapısına paralel olarak öğrencilerin nicel muhakemelerini destekleyen ve yansıtıcı soyutlama yapmalarına imkan veren mantıksal-matematiksel öğrenme etkinlikleri çerçevesine dayalı olarak tasarlanmıştır. Etkinlikler tasarlandıktan sonra matematik öğretmenliği birinci sınıfta analiz I dersine devam etmekte olan 12 matematik öğretmeni adayı ile pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamanın temel amacı, öğretim dizisindeki etkinliklerin öğrenciler için anlaşılır olup olmadığını, öğrenci öğrenmelerini nasıl desteklediğini ve hangi soruların öğrenme sürecinde yanlış anlamalara neden olabileceğini ortaya çıkararak etkinlikleri düzenlemek olmuştur. Etkinlikler üzerine çalışan öğretmen adayları etkinliklerdeki bazı soruları değerlendirirlerken bazen grup olarak farklı algılamışlar bazen de hemfikir olmalarıyla birlikte soruları araştırmacıların düşündüklerinden farklı şekillerde ele almışlardır. Ayrıca, sorulardan bazılarının öğrencilerin kavramı öğrenmeleri için yönlendirici olmadığı, bazılarının da eksik bilgi içerdiği görülmüştür. Etkinliklerin uygulamaları sırasında ve uygulamalardan sonra problem durumunu sunan metnin içeriği, etkinliklerdeki soruların anlaşılırlığı, soruların yansıtıcı soyutlamayı destekleyip desteklemediği, öğretmenlerin öğretim deneyi süresince öğrencileri destekleyecekleri aşamalar yönüyle öğretim dizisi değerlendirilmiş ve etkinlikler amaçları doğrultusunda revize edilmiştir. Örneğin doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine ilişkin etkinlikte bağlamın ardından öğrencilerin kavramın tüm durumları içerecek şekilde yorumlamalarını destekleyecek sorulara yer verilmemişti. Uygulama sırasında bu soruların gerekliliğine karar verilmiş ve bu doğrultuda sorular eklenmiştir. Bunun yanı sıra basınç ile oksijenin çözünme miktarına ilişkin verileri içeren tablodaki değerler öğrencilerin nicelikleri ve ilişkilerini inceleyerek sabit değişim oranı niceliğini oluşturmalarını destekleyecek şekilde revize edilmiştir. Öğrencilerin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini destekleyecek şekilde tasarlanan öğretim dizisi Dünya'nın Dibi, El-Castillo, En Uzun Basketbol Atışı ve Parabolik Uçuş etkinliklerini içermiştir. Söz konusu etkinlikler birinci döngü kapsamında uygulanmış ve bu döngüde elde edilen verilerin analizine dayalı öğretim dizisi revize edilerek ikinci döngüye geçilmiştir. İkinci döngü kapsamında yapılan analizler doğrultusunda da öğretim dizisinin nihai hali ortaya çıkarılmıştır.

Temel alınan perspektifler doğrultusunda öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme sürecine bu kavramla ilişkili olan doğrusal fonksiyonlara ilişkin bilgilerini kullanarak başlamalarının anlamlı olacağı düşünülmüş ve öğretim dizisindeki ilk etkinlik doğrusal fonksiyon kavramının kavramsal öğrenilmesine yönelik hazırlanmıştır. 9. sınıf düzeyinde doğrusal fonksiyon üzerine konuşulmuş olsa bile gerçekleştirilen öğretim süreçlerinin işlemsel bilginin kazandırılmasına yönelik olduğu varsayımıyla ikinci dereceden fonksiyonlara geçiş yapılmadan öğrencilerin doğrusal fonksiyonlar ve içerdiği nicelikler ile ilgili zihinsel eylemlerini tetikleyecek böyle bir etkinliğin gerekli olduğu düşünülmüştür. Sonrasındaki her etkinliğin de bir önceki etkinlik kapsamında oluşturulan fikirlerin kullanılarak ve gerçekleştirilen nicel muhakemelerden yararlanılarak yeni anlamların oluşturmasını destekleyecek şekilde olmasına dikkat edilmiştir. Ek olarak öğretim dizisi kapsamında öğrenme etkinliklerinin ardından öğrenci öğrenmelerini değerlendirmek amacıyla dört ölçme-değerlendirme etkinliğine yer verilmiştir (Bkz. Ek 2). Bu etkinliklerin her biri bireysel olarak bir ders saati süresi kapsamında uygulanmıştır. İlk döngü kapsamında sadece yazılı olarak gerçekleştirilen ölçme-değerlendirme aşaması ikinci döngü kapsamında klinik mülakatla uygulanmıştır.

Öğrencilerin öğretim dizisinde ilk olarak üzerinde çalıştıkları Dünya'nın Dibi etkinliğinin (Bkz. Ek 1) öğrenme hedefleri Tablo 1'de gösterilmektedir.

Tablo 1. Dünya'nın Dibi isimli etkinliğe ilişkin öğrenme hedefleri

Öğrenme Adımı: Doğrusal fonksiyonu açıklar.	
Etkinlik	Hedef
Dünya'nın Dibi (1.Aşama) 2 ders saati	● Problem durumundaki nicelikleri bağımsız ve bağımlı değişken ile eşler. ● Problem metni içerisindeki sözel ifadede yer verilen sabit değişim miktarını fark ederek iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkiyi modeller. ● Tablo gösterimindeki verileri inceleyerek sabit değişim oranını fark eder ve bu değişim oranından yararlanarak iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkiyi modeller. ● Doğrusal fonksiyonun içerdiği nicelikleri farklı gösterimleri doğrultusunda inceler ve birbirleriyle ilişkilendirir. ● Doğrusal fonksiyonların tanım ve değer kümelerini gerçek yaşam bağlamıyla ilişkili olarak belirler.
Dünya'nın Dibi (2.Aşama) 2 ders saati	● Oluşturulan üç farklı doğrusal fonksiyonun genel formunu ifade eder. ● $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin anlamlarını ve birbirleriyle ilişkilerini açıklar. ● $f(x) = ax + b$ fonksiyonundaki katsayıların anlamlarını açıklar ve farklı gösterimlerdeki karşılıklarını yorumlar. ● $f(x) = ax + b$ fonksiyonu ile $ax + b = 0$ denklemi arasındaki ilişkiyi açıklar. ● Doğrusal fonksiyon kavramına ilişkin soyutlamalar yapar.

Öğretim dizisi kapsamındaki Dünya'nın Dibi isimli etkinlikte öğrencilere ilk olarak "..derinliklere inildiğinde her 10 metrede basıncın 1 ATM artması.." şeklinde derinlik ve basınç ilişkisinin sözel ifadesi verilerek onların iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak yazmaları istenmiştir. Ardından basınç ve basınca bağlı olarak vücuttaki oksijen çözünme miktarlarına ilişkin gerçek yaşamdan alınan veriler tablo ile sunularak öğrencilerin bu iki değişkenin ilişkisini matematiksel olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Etkinlik öğrencilerin basınç ve oksijenin çözünme miktarına ilişkin verilere eş zamanlı değişim fikriyle odaklanacakları ve bu niceliklerdeki değişimleri inceleyerek değişim miktarları arasındaki sabit oranı anlamlandırabilecekleri şekilde tasarlanmıştır. Bu kapsamda öğrencilerin nicel muhakemeler yoluyla doğrusal fonksiyondaki temel nicelikleri düşünmeleri, yeni nicelikler oluşturmaları ve farklı gösterimler arasında ilişkilendirmeler yapmaları amaçlanmıştır. Doğrusal fonksiyon etkinliğinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin sonraki etkinliklerin verimli bir şekilde ilerletilmesi için temel oluşturacağı düşünülmüştür. Bu bağlamda bu etkinlik kapsamında öğrencilerin eşleme, eş zamanlı değişim, dönüşüm, değişim oranının sabit olması ve eğimin değişim oranı ile ilişkilendirilmesi gibi kritik fikirleri oluşturmaları amaçlanmıştır.

Dünya'nın Dibi etkinliğinin birinci aşamasına iki ders saati, ikinci aşamasına da iki ders saati olarak toplam dört ders saati süresi etkinliğin tamamlanması için yeterli görülmüştür. Dünya'nın Dibi etkinliği doğrusal fonksiyonların kavramsal öğrenilmesini desteklemek amacıyla sunulduğu için sonrasında herhangi bir ölçme-değerlendirme uygulamasına yer verilmemiştir. Bu etkinliği tamamlayan öğrenciler temel olarak ikinci dereceden fonksiyonlarla doğrusal fonksiyonların ilişkilendirilmesinin amaçlandığı El Castillo etkinliği üzerine çalışmışlardır (Bkz. Tablo 2).

Tablo 2. El Castillo isimli etkinliğe ilişkin öğrenme hedefleri

Öğrenme Adımı:
1. İki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu ifade eder.
2. İkinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesine bağlı oluşturduğu sıralı ikilileri analitik düzleme yerleştirerek ve noktaları sıklaştırarak ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin yapısını sezer.

Etkinlik	Hedef
El Castillo (1.Aşama) 2 ders saati	● Matematiksel modelleme sürecini uygular. ● Doğrusal fonksiyon fikirlerini kullanır ve karelerin kenar uzunluklarını farklı bağımsız değişkenlere bağlı olarak temsil eden doğrusal fonksiyon modellerini oluşturur. ● Elde edilen doğrusal fonksiyon modelini kullanarak karelerin alanlarını temsil eden yeni matematiksel modelleri oluşturur.
El Castillo (2.Aşama) 2 ders saati	● Alana ilişkin fonksiyonu oluşturmada doğrusal fonksiyondan yararlanır. ● İki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu açıklar. ● Alanı temsil eden fonksiyonların değişim oranlarının sabit olmadığını açıklar. ● Alanı temsil eden fonksiyonların değişim miktarlarının değişimlerinin sabit olduğunu açıklar. ● İkinci dereceden fonksiyonun grafiğinin doğrusal olmadığını ve bir niceliğe göre simetrik olan bir eğri olduğunu sezer. ● İkinci dereceden fonksiyon ile doğrusal fonksiyon arasındaki ilişkiye yönelik genellemelere ulaşır.

El Castillo isimli etkinlik ile öğrencilerin ilk olarak kare piramit yapının sırasıyla katlarına, basamaklarına ve herhangi bir yüksekliğine bağlı tabana paralel oluşan kesitlerin kenar uzunluklarını gösteren matematiksel ifadeyi oluşturmaları istenmiştir. Bağımsız değişkenin ilk olarak yapının katları olarak ele alınmasıyla öğrencilerin bu durumu temsil eden grafiği noktasal grafik olarak düşünmeleri amaçlanmıştır. Sonrasında yapının basamaklarını ve son olarak herhangi bir yüksekliğini bağımsız değişken olarak ele almalarını sağlayan sorularla öğrencilerin sürekli olan bir doğru grafiğini oluşturmalarının destekleneceği düşünülmüştür. Bu sürecin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin yapısının nasıl olduğunun anlamlandırılması için ön hazırlık olacağı varsayılmıştır. Sonrasında karenin alan fikrinden yararlanarak iki kenar çarpımından ve dolayısıyla iki doğrusal fonksiyonun çarpımından hareketle ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini elde etmeleri beklenmiştir. Etkinlikte yer alan sorularla öğrencilerin doğrusal fonksiyonun kritik özelliklerinden farklı olarak ikinci dereceden fonksiyonun ne gibi fikirleri içerdiğini anlamlandırmaları ve grafiğine ilişkin başlangıç fikirleri oluşturmaları amaçlanmıştır.

Bu etkinliğin ilk aşamasının iki ders saati içerisinde ikinci aşamasının da iki ders saati içerisinde olacak şekilde toplam dört ders saatlik sürede tamamlanması hedeflenmiştir. Etkinliğin uygulamasının ardından öğretim dizisini bu aşamasına kadar öğrencilerin anlamalarının değerlendirilmesi amacıyla ölçme ve değerlendirme yapılması gerekli görülmüştür. Dünya'nın Dibi ve El Castillo etkinliklerinin tamamlanmalarının ardından öğrencilere bireysel olarak yazılı bir şekilde iki ölçme-değerlendirme etkinliği verilmiştir. Bu etkinliklerden birincisinde A2, A3, A4 gibi farklı kağıt boyutlarının en ve boy uzunlukları verilerek, öğrencilerin en ve boy uzunlukları arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu ve kağıtların bir boyutuna bağlı olarak alanlarını gösteren fonksiyonu yazmaları istenmiştir. İkinci etkinlikte, farklı kenar uzunluklarına sahip kare şeklindeki kağıtların bir kenarı boyunca 1 cm diğer kenarı boyunca 3 cm'lik şeritler kesilmesi durumunda oluşan dikdörtgensel bölgelerin kenarları arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu ve karenin kenar uzunluğuna bağlı olarak dikdörtgensel bölgelerin alanlarını gösteren fonksiyonu yazmaları istenmiştir.

Öğretim dizisinin devamında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri ve grafiği arasındaki ilişkilendirmeleri yapmalarını amaçlayan ve grafiksel gösterimdeki nicelikleri oluşturmalarını sağlayan En Uzun Basketbol Atışı isimliği etkinlik uygulamasına geçiş yapılmıştır (Bkz. Tablo 3).

Tablo 3. En Uzun Basketbol Atışı isimli etkinliğe ilişkin öğrenme hedefleri

Öğrenme Adımı:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiğinin simetri eksenini ve tepe noktasını keşfeder.
2. Grafiği verilen ikinci dereden fonksiyonların farklı cebirsel gösterimlerini (kanonik form, çarpımsal form ve standart form) yazar ve aralarında geçiş yapar.

Etkinlik	Hedef
En Uzun Basketbol Atışı (1.Aşama) 2 ders saati	● Bir basketbol topunun farklı hareketlerini inceleyerek parabolün kritik özelliklerini ifade eder. ● En uzun basketbol atışının matematiksel modelini cebirsel olarak oluşturur. ● Grafiği verilmiş ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini yazar. ● Parabolün simetri eksenini fark eder ve özelliklerini açıklar. ● Parabolün tepe noktasını fark eder ve özelliklerini açıklar.
En Uzun Basketbol Atışı (2.Aşama) 2 ders saati	● Parabolün simetri ekseni ile ilgili genellemeler yapar. ● Simetri ekseni ile tepe noktasını ilişkilendirir. ● İkinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri arası dönüşümleri yapar. ● İkinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösterimi ile cebirsel gösterimleri arası dönüşümler yapar.

En Uzun Basketbol Atışı etkinliği ile öğrencilerin grafiği verilen bir ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmaları için gerekli niceliklerin neler olduğunu fark etmeleri, grafiksel gösterimde önemli olan nicelikleri belirlemeleri ve bu niceliklerin hem cebirsel gösterimde hem de grafiksel gösterimde ne gibi anlamları olduğunu anlamlandırmaları amaçlanmıştır. Bu amaçlarla, ilk olarak fonksiyonda aynı değere sahip noktaları ele alarak çıkarımlarda bulunmaları ve simetri doğrusunu sezmeleri sağlanmıştır. Sonrasında simetri doğrusu ile cebirsel ifade arasındaki ilişkinin kurulmasına yönelik sorular sorulmuştur. Bununla birlikte, ikinci dereceden fonksiyonun üç farklı cebirsel gösterimi birbirleriyle ve grafiksel gösterim ile ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Her bir cebirsel gösterime ilişkin çıkarımlarda bulunmaları ve bu çıkarımlarını genelleştirmeleri amaçlanmıştır.

Bu etkinliğin tamamlanmasından sonra öğrencilerin anlamalarını değerlendirmek amacıyla Angry Birds oyununun tanıtımını yapan bir problem durumu verilip onların dört kuşun oyundaki domuzları vurması için atılmasıyla oluşturdukları parabolik yolun cebirsel ifadelerini yazmaları istenmiştir. Bu süreçte de Basketbol Etkinliğinde öğrenmeleri amaçlanan fikirleri ne şekilde öğrendikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ölçme-değerlendirme etkinliğinin ardından öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun katsayılarının değişimi ile grafikteki değişimleri ve parabolün ötelenmesi durumundaki cebirsel ifadesindeki değişimleri anlamlandırmalarını sağlayacak Parabolik Uçuş isimli etkinlik uygulamasına geçilmiştir (Bkz. Tablo 4).

Tablo 4. Parabolik Uçuş isimli etkinliğe ilişkin öğrenme hedefleri

Öğrenme Adımı:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine ilişkin "a" katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur.
2. $y = ax^2 + c$ ifadesine ilişkin "c" katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur.
3. Tepe noktasını belirleyen katsayıların farklı durumlarını inceler ve çıkarımlarda bulunur.

Etkinlik	Hedef
Parabolik Uçuş (1.Aşama) 2 ders saati	● Parabolün farklı cebirsel gösterimlerini yazar. ● $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun değişen "a" katsayısına göre parabolün durumuna ilişkin çıkarımlarda bulunur. ● Parabolün sınırsızlığını ve sürekliliğini fark eder.
Parabolik Uçuş (2.Aşama) 2 ders saati	● $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun değişen "c" katsayısına göre parabolün durumuna ilişkin çıkarımlarda bulunur. ● Parabolün x eksenine paralel olarak ötelenmesine ilişkin çıkarımlarda bulunur. ● Parabolün y eksenine paralel olarak ötelenmesine ilişkin çıkarımlarda bulunur. ● Parabolün ötelenmesi sonucunda katsayılarına ilişkin genellemelere ulaşır.

Parabolik Uçuş isimli etkinlik ile öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesindeki katsayıların anlamlarına ilişkin çıkarımlarda bulunmaları ve farklı öteleme hareketleri ile hem cebirsel gösterim hem de grafiksel gösterim ile ilgili olan değişiklikleri anlamlandırmaları ve birbirleriyle ilişkilendirmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk olarak "a" katsayısının değerinin farklılaşmasının grafiksel gösterimde ne gibi değişikliklere neden olduğunu anlamalarına yönelik sorulara yer verilmiştir. Sonrasında parabolün x eksenine paralel olarak hareket ettirilmesinin ve y eksenine paralel olarak hareket ettirilmesinin fonksiyonun cebirsel ifadesinde ne gibi değişiklere neden olduğunu anlamlandırmaları ve ötelemeye ilişkin genelleme yapmaları beklenmiştir.

Parabolik Uçuş etkinliğinin tamamlanmasının ardından parabollerin ötelenmesine ilişkin anlamalarını değerlendirmek için öğrencilerin sahillerdeki güvenlik amacıyla bulunan parabolik kesitler şeklindeki zincirlerin cebirsel ifadelerini ve bir parabolün cebirsel ifadesine bağlı olarak diğer parabollerin cebirsel ifadelerini oluşturmaları istenmiştir.

Son olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla yirmi açık uçlu sorudan oluşan kavramsal anlama testi uygulanmıştır. İkinci dereceden fonksiyonlara yönelik alanyazında vurgulanan ve kavramsal analiz ve uygulama süreciyle ortaya çıkarılan nicelikleri/kavramları/fikirleri değerlendirmek amacıyla hazırlanan kavramsal anlama testinde ikinci dereceden fonksiyonlar ile doğrusal fonksiyonların farklılıklarına, benzerliklerine ve ilişkilerine, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun a, b ve c katsayılarının anlamlarına, ikinci dereceden fonksiyonun grafiksel ve farklı cebirsel gösterimlerine, çeşitli öteleme hareketlerine ilişkin soruların yanı sıra verilen tablo değerlerini kullanarak fonksiyon ifadesi oluşturmayı gerektiren sorulara ve bakterilerin üremesi ile ilgili gerçek yaşam bağlamlı bir soruya yer verilmiştir. Kavramsal anlama testindeki yirmi soru beş farklı kategoriye ayrılmış ve sorular birden fazla kategori ile ilişkilendirilmiştir. İlk kategori genel fonksiyonlara, doğrusal fonksiyonlara ve ikinci dereceden fonksiyonlara ve her birinin kendine özgü özelliklerine, birbirleriyle ilişkilerine, farklı gösterimlerine ilişkin anlamaları gerektiren altı soruyu içermiştir. İkinci kategoride doğrusal fonksiyonların ve ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarını yorumlamayı gerektiren üç soruyu, üçüncü kategori ikinci dereceden fonksiyonların tepe noktasına ve simetri eksenine ilişkin anlamaları gerektiren beş soruyu ve dördüncü kategori ikinci dereceden fonksiyonların katsayılarının anlamlarını bilmeyi gerektiren beş soruyu içermiştir. Kavramsal anlama testi ile tasarlanan öğretim dizisine katılan öğrencilerin hangi anlamalara sahip oldukları ortaya çıkarılmaya çalışılmış ve süreç içerisindeki verilerle birlikte bu test kapsamında ortaya çıkan öğrenci düşüncelerine göre öğretim dizisi gözden geçirilmiştir.

2.3.Verilerin Toplanması

Tasarım tabanlı araştırmaya dayalı çalışmanın veri toplama aşaması nitel paradigmaya dayandırılmıştır. Öğrenciler etkinlikler üzerine çalışırlarken gerçekleştirilen öğretim deneyleri boyunca alınan video kamera kayıtları, araştırmacıların gözlem notları, öğrencilerle yapılan klinik mülakatların kamera kayıtları ve öğrencilerin yansıtıcı günlükleri çalışmanın verilerini oluşturmuştur.

2.3.1.Öğretim Deneyi

Öğretim deneyleri tasarım tabanlı araştırmaların içerisinde yer alan en temel aşama olarak ifade edilmektedir. Öğretim deneyi klinik mülakat yöntemine dayandırılmakta ancak, öğrencilerin bilgilerini etkileme yollarını ve araçlarını deneyimlemeyi içermesi sebebiyle klinik mülakattan daha fazlası olarak görülmektedir (Steffe, 2002). Steffe ve Thompson (2000) öğretimle sağlanan deneyimler olmadan, öğrencilerin oluşturacakları güçlü matematiksel kavramları ve işlemleri anlamanın ve bu kavramların ve işlemlerin araştırmacılarınkinden farklı olduğunu ortaya koyabilmelerinin mümkün olmayacağını dile getirmektedirler. Gerçekleştirilen ilk döngü boyunca yürütülen öğretim deneyleri onuncu sınıf öğrencilerinin ikişer kişilik gruplar halinde çalışmaları ile gerçekleştirilmiştir. İkinci döngü kapsamındaki öğretim deneyleri iki öğrencinin birlikte etkinlikler üzerine çalışması ile gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler etkinlikler üzerinde çalışırlarken tüm süreç video kamera ile kaydedilmiştir. Öğretim deneylerinin video kamera kayıtlarının çözümlemeleri ve etkinliğe yönelik öğrencilerin yazılı çözüm kağıtları çalışmanın verilerini oluşturmuştur.

2.3.2.Klinik Mülakat

Piaget (1976) öğrencilerin akıl yürütme biçimlerini ve işlevlerini anlamak için klinik mülakatı geliştirmiştir (akt. Mojica, 2010). Hunting (1997) klinik mülakatı öğrencilerin düşüncelerini ve matematiksel öğrenmelerini değerlendirmenin alternatif bir yolu olarak ifade etmektedir. Çalışmadaki verilerden bir diğeri klinik mülakatlar boyunca alınan video kamera kayıtlarıdır. Araştırmanın farklı aşamalarında klinik mülakat yönteminden yararlanılmış ve süreç içerisinde gerçekleştirilen tüm klinik mülakatlar video kamera ile kaydedilmiştir. İlk olarak, tasarı aşamasında gerçekleştirilen klinik mülakat varsayımsal öğrenme sürecini şekillendirmek için on birinci sınıfta öğrenim görmekte olan bir öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın uygulama aşamasının ikinci döngüsündeki öğrencilerle üç farklı şekilde klinik mülakat gerçekleştirilmiştir. İlk olarak öğretim dizisine başlamadan önce öğrencilerin fonksiyonlara ve doğrusal fonksiyonlara ilişkin ön bilgilerinin ne olduğunu anlamak için öğrencilerle bireysel klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca öğrenme etkinliklerinin ardından öğrencilerin ilgili kavramları anlayıp anlamadıklarını, hangi fikirlere sahip olduklarını ve öğrenmelerini değerlendirmek amacıyla ölçme ve değerlendirme etkinlikleri uygulanmıştır. Son olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlama testi klinik mülakat yöntemi ile uygulanmıştır. Öğrenciler soruları yanıtlarlarken ne düşündükleri ayrıntılı olarak ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

2.3.3.Gözlem Notları

Gözlem, araştırmacının herhangi bir ortamda oluşan bir davranışa ilişkin ayrıntılı, kapsamlı ve zamana yayılmış bir resim elde etmek istemesi halinde kullanabileceği bir yöntemdir (Bailey, 1992’den akt., Yıldırım ve Şimşek, 2011, s.169). Çalışma kapsamında gerçekleştirilen grup çalışmaları boyunca öğrencilerin etkinlikleri ele alma yaklaşımları, çözümleri, birbirleriyle etkileşimleri ve fikirlerinin belirlenmesi amacıyla araştırmacılar gözlemler yapmışlar ve bu gözlemler esnasında önceden belirledikleri amaçlar ve tahminler doğrultusunda gözlem notları almışlardır. Araştırmacılar sınıf çalışmaları boyunca gruplar arası dolaşarak etkinliklere ve öğrencilerin anlamalarına ilişkin belirledikleri kritik durumları not almışlardır. Gözlem notları öğretim dizisindeki etkinliklerin ve sürecin işleyişinin revize edilmesinde birincil veri kaynaklarına destek olarak kullanılmıştır.

2.3.4. Yansıtıcı Günlükler

Uygulamanın ikinci döngüsünde öğrencilerden gerçekleştirdikleri süreci her yönüyle değerlendirmeleri için yansıtıcı günlükler yazmaları istenmiştir. İki öğrencinin çalışma yaptıkları her günün ardından bireysel olarak yansıtıcı günlük yazmaları istenmiştir. Öğrenciler yansıtıcı günlüklerini evlerinde A4 kağıdına yazarak bir sonraki çalışma gününde teslim etmişlerdir. Öğrenciler yansıtıcı günlükler yoluyla matematiksel modelleme etkinliklerine, sınıf içerisinde gerçekleştirilen etkileşimlere ve arkadaşlarıyla katıldıkları öğrenme süreçlerine ilişkin edindikleri kazanımlarını ve fikirlerini yazarak bilişsel, duyuşsal ve sosyal yönlerden araştırmacılara dönütler vermişlerdir. Öğrencilerin yansıtıcı günlükleri taranarak bilgisayar ortamına aktarılmış ve çalışmanın diğer verilerinden elde edilen bulgulara destek olarak kullanılmıştır.

2.4.Verilerin Analizi

Çalışmada yapılandırmacılık bilgi kuramına dayanan ve açık uçlu kodlama çerçevesiyle bir kuram “oluşturma” amacı taşıyan Charmaz’ın (2011) yapılandırmacı kuram oluşturma deseni göz önünde bulundurulmuştur. Bu kapsamda gerçekleştirilen veri analiz sürecinde veri toplama süreci ile eş zamanlı bir şekilde sürekli karşılaştırmalı olarak “devam eden analizler” yapılmıştır. Tüm süreç içerisinde yapılandırılmamış bir şekilde devam eden bu analizlerde öğrenci anlamaları bağlamında etkinliklere, ortaya çıkan ya da çıkması beklenip çıkmayan niceliklere ve nicel operasyonlara odaklanılmış ve bu doğrultuda veri toplama sürecinin de şekillenmesine fırsat oluşturulmuştur.

Kuram oluşturma desenine dayanan bir analiz sürecinde bir diğer analiz ise geriye dönük analizler olarak ortaya çıkmıştır. Bu analiz sürecine yön verebilmek için tüm öğretim deneyleri ve klinik mülakatlar birebir yazıya aktarılarak transkript metinleri oluşturulmuştur. Buna ek olarak, öğrencilerin yazılı yanıtları taranarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Steffe (2002) öğretim deneylerinde kamera kaydına alınan ve kaydedilen her bir öğretim sürecinin öğretim deneyinin ardından geriye dönük olarak incelendiğini vurgulamaktadır. Geriye dönük analizlerle öğretim deneylerindeki mikro tasarı döngülerinden elde edilenlere dayalı olarak geliştirilmiş öğretim teorisinin yeniden yapılandırılması amaçlanmaktadır (Gravemeijer & van Eerde, 2009). Çalışma kapsamında birinci ve ikinci döngülerin sonunda öğrencilerin nicel muhakemeleri bağlamında geriye dönük analizler gerçekleştirilmiştir. Geriye dönük analizlerle öğrencilerin anlamaları ayrıntılandırılmaya çalışılmıştır. Öğrenci anlamaları doğrultusunda çalışmanın tasarım aşamasında ortaya koyulan varsayımsal öğrenme yolu revize edilmiştir. Ek olarak varsayımsal olarak belirlen öğrencilerin öğrenme süreçlerinin etkinlikler boyunca ortaya çıkan öğrenci düşüncelerine ve zihinsel eylemlerine dayalı olarak kapsamlı bir şekilde açıklanması amaçlanmıştır. Bu süreçte ilk olarak öğrencilerin niceliklere değindikleri, niceliklere ulaşmalarını tetikleyen söylemlerin yer aldığı ya da nicel operasyonları gerçekleştirmelerini sağlayan etkileşimlerin olduğu transkript bölümleri belirlenmiştir. Belirlenen bu transkript bölümleri ilk olarak zihinsel eylemler açısından sürekli karşılaştırılarak açık kodlama yöntemiyle analiz edilmiştir. Tüm transkript incelendikten sonra her biri ayrıntılı olarak nicel muhakeme bağlamında odak kodlama ile analiz edilmiş ve her transkript bölümü karşılaştırılarak öğrencilerin muhakemelerine ilişkin notlar alınmıştır. Tablo 5’de geriye dönük analiz sürecinden bir kesit gösterilmektedir.

Tablo 5. Geriye dönük analiz sürecinden bir kesit

Transkript Bölümü		Ortaya Çıkan Nicelikler	Gerçekleştirilen Nicel Operasyonlar	Genel Değerlendirme
Alp:	x bir artarken y'nin artış miktarı gittikçe düşüyor, şurada sıfır oluyor [parabolün tepe noktasını gösteriyor.] şurada sıfırdan aşağıya oluyor, düşmeye başlıyor, o zaman başladıkları ve bitirdikleri nokta aynı ve x in miktarı aynı olunca direkt simetriği oluyor, aynı miktarda artıyor, aynı miktarda azalıyor.	• Değişim miktarı • Değişim oranı • Nokta • Tepe noktası	• Çarpımsal karşılaştırma • Toplamsal karşılaştırma	Parabol üzerindeki iki nokta arasındaki y değişimleri ile x değişimleri çarpımsal olarak karşılaştırıyor ve iki değişim oranının miktarını toplamsal karşılaştırarak simetri niceliğine ulaşıyor.

3.Bulgular

Bulgular sunulurken öğretim dizisinin ilk iki etkinliği olan Dünya'nın Dibi ve El Castillo etkinliği ile ilgili öğrenci düşüncelerine odaklanılmıştır. Özellikle bu iki etkinliğe odaklanılmasının sebebi, bu etkinlerin tamamlanmasıyla öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları doğrusal fonksiyonlarla ilişkilendirerek oluşturmaları ve ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin simetrik bir eğri olduğunu fark etmeleri beklendiği için bu etkinlerdeki niceliklere ve kavramlara ilişkin fikirlerinin diğer etkinlikler için temel oluşturmasıdır. Bulgular kapsamında öğrencilerin bu iki etkinlikteki temel niceliklere ilişkin öğrenme süreçlerini gösteren modeller sunulmuş ve öğrencilerin ifadelerinden kesitlerle örneklendirmeler yapılmıştır.

Öğrenciler ilk olarak Dünya'nın Dibi etkinliği üzerinde çalışmışlardır. Doğrusal fonksiyonun sözel, cebirsel, grafiksel ve tablo ile gösterimlerini içeren etkinlikte öğrenciler iki nicelik arasındaki ilişkiyi farklı gösterimleri kapsamında sabit bir orana ulaşarak ifade etmişlerdir. İki döngünün öğretim deneylerine dayalı olarak onuncu sınıf öğrencilerinin doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmaya ilişkin öğrenme süreçlerinin aşağıdaki gibi olduğu ortaya çıkmıştır.

Eş zamanlı değişen iki niceliği belirleme ve bu nicelikleri eşleme

Eş zamanlı değişen niceliklerin değişimlerinin yönünü karşılaştırma

Değişim miktarlarını toplamsal karşılaştırma

Değişim miktalarını çarpımsal karşılaştırma

Sabit değişim oranını belirleme

İki niceliği çarpımsal karşılaştırma sonucuna dayalı olarak ilişkilendirme

Nicelikleri yeniden eşleme fikri doğrultusunda n parametresinin değerine ulaşma

İki nicelik arasında f(x)=mx+n kuralını oluşturma

Şekil 3. Onuncu sınıf öğrencilerinin doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmaya ilişkin öğrenme süreçleri

Şekil 3'te görüldüğü gibi, aralarında doğrusal ilişki bulunan iki niceliği inceleyen öğrenciler ilk olarak gerçek yaşam bağlamında birbirleriyle eş zamanlı olarak değişen nicelikleri belirlemişler ve bu nicelikleri eşlemişlerdir. Üzerinde çalışacakları iki niceliği matematiksel olarak düşünmeye başlamışlardır. Sonrasında bu iki niceliğin değişimlerinin nasıl olduğuna yönelerek birinin miktarı artarken diğerinin miktarının da arttığını ifade etmişlerdir, bir başka deyişle niceliklerin değişim yönlerini belirlemişlerdir. Bu artışları ilk olarak toplamsal olarak yorumlayarak bir niceliğin değerinin değişim miktarı ile diğer niceliğin değişim miktarını birbirinden bağımsız olarak ifade etmişlerdir. Ancak bu toplamsal belirleme onların nicelikler arasındaki ilişkiyi ifade etmelerine imkan vermediği için değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırmışlardır. Sadece herhangi iki değer arasında değil farklı değerler arasındaki değişim miktarlarını çarpımsal olarak karşılaştırmaları sabit değişim oranını belirlemelerine ortam hazırlamıştır. Sonrasında da elde ettikleri sabit değişim oranını ilişkiyi gösteren temel nicelik olarak düşünüp bu orandan yararlanarak iki nicelik arasındaki matematiksel ilişkiyi doğrusal fonksiyon ifadesi ile oluşturmuşlardır.

Dünya'nın Dibi etkinliğinin birinci döngü kapsamında uygulanması sürecinde doğrusal fonksiyonun kavramsal öğrenilmesi için önemli olan değişim oranının sabit olduğu fikrine ulaşan Ece ve Umut adlı öğrenciler değişkenler arasındaki değişim miktarlarını toplamsal ve çarpımsal olarak karşılaştırmışlardır. Basınç ve kandaki oksijenin çözünme miktarı arasındaki matematiksel ilişkiyi oluşturmaya çalışırlarken değişim yönünü dikkate almışlar ve değişim miktarlarını incelemişlerdir.

Umut: Basınç arttıkça bu da [kandaki oksijenin çözünme miktarı için] artıyor. Nasıl matematiksel olarak, şimdi biraz yarısından biraz az gibi değil mi?

Ece: 1,5'a bakalım, 1'e bakalım mesela, yarım arttığı zaman ne kadar artmış bu?

Umut: 25 artmış.

Ece: 0,25 artmış

Umut: Bence 1'de bir istisna vardı. Gerisi düz geliyordur mesela.

Ece: Bakalım, 1,3'e bakalım.

Umut: Şuradaki arasıyla [1-2], şuradaki [2-3] arasına bakalım. Burada 15 var, burada 10 var. Evet, evet 1'de yine bir istisna var. Evet, evet, bitti soru bitti.

Ece: Şurada mesela 2 artmış, 0,2 artmış [1-2], şurada da 0,2 artmış [2-3] değil mi, ama şurada 15, şurada 10 artmış

Umut: Hayır burada 3 [1-2], bitti bitti., soru bitti.

Ece: Dur, şurada 9 mu artmış, [3-4],

Umut: Burada 2 ATM de 0,10 artıyor,

Ece: Şuna bak. Burada 9 artmış, yani 0.9 artmış. Şunun üç katı artmış dimi.

Umut: Evet, Evet yine 45

Ece: Ne 45 i, 5 artmış.

Umut: Ne 5i, 45 işte.

Ece: Pardon.

Umut: Bak burada 7, burada 35, tamam bitti, soru bitti şuan. Şimdi artık anladık. Fonksiyon gelsin şimdi. Yine 1+ var, 1+kesin var.

Ece: [yazıyor] x'in 5 katı dimi her zaman. O zaman 5x olacak, şuradaki x de basınç artış miktarı.

Umut: 5 katı değil, 2'ye bölünmüş hali.

Ece: Hıı doğru, bekle dur.

Umut: x/2 bence.

Ece: Evet, evet, bir dakika.

Umut: Çünkü bak, 0,1 arttığında, 0,05 artıyor.

Ece ve Umut ilk olarak eş zamanlı değişen iki niceliğin değişim yönünü belirlemişler ve basınç arttıkça oksijenin çözünme miktarının arttığını ifade etmişlerdir. Ardından tablodaki değerleri y=mx fikrine dayalı olarak incelemeye başlamışlardır. Ancak bu fikrin üzerinde çok durmayıp değişim miktarlarını incelemeye karar vermişlerdir. Basınç değerlerinin artışına karşılık oksijenin çözünme miktarında ne kadar bir değişim olduğunu hesaplamaya çalışmışlar ve bu süreçte ilk olarak değişim miktarlarını toplamsal olarak karşılaştırmışlardır. Değişim miktarlarının sabit olduğunu fark eden öğrenciler değişim oranını ½ olarak hesaplamışlardır.

Öğretim dizisi kapsamında doğrusal fonksiyonun eğim kavramına ilişkin öğrenme süreçleri Şekil 4'te gösterilmektedir.

Nicelikleri bağımlı ve bağımsız değişken ile eşleme

Bağımlı ve bağımsız değişkenleri analitik düzlemin eksenleri ile eşleme

Niceliklerin değişimlerinin yönünü belirleme

Değişimlerinin yönü doğrultusunda niceliklerin değerlerini eşleyerek noktalar oluşturma

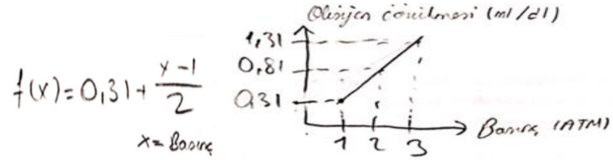
Oluşan noktaların x ve y değişim miktalarını çarpımsal karşılaştırma

Eğim kavramına ulaşma

Şekil 4. Onuncu sınıf öğrencilerinin doğrusal fonksiyonun eğime ilişkin öğrenme yolları

Şekil 4'te görüldüğü gibi, öğrenciler ilk olarak belirledikleri nicelikleri değişkenlerle eşlemişlerdir. Bu nicelikleri bağımsız ve bağımlı değişken doğrultusunda analitik düzlemin eksenleri ile eşleyerek grafiksel yapının temelini oluşturmuşlardır. Analitik düzlem üzerinde eşleyecekleri noktaları oluşturmadan önce niceliklerin değişim yönünü belirlemişlerdir. Böylece eşledikleri noktaların x ve y değerlerini kullanarak değişim miktarlarını çarpımsal olarak karşılaştırmışlar ve grafik üzerinde sabit değişim oranına bir başka ifadeyle eğime ulaşmışlardır.

Doğrusal fonksiyonun değişim oranını cebirsel olarak inceleyen bu öğrenciler iki nicelik arasındaki ilişkiyi analitik düzlemde de grafiksel olarak ifade etmişlerdir. Basınç ile oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi analitik düzleme taşıyan Ece ile Umut cebirsel ifadeye ulaştıktan sonra noktaları analitik düzlemde eşleyerek grafiğini de çizmişlerdir.



Öğrenciler cebirsel ifade ile grafiksel ifade arasındaki birbirleriyle ilişkilendirerek grafiksel gösterimde eğime karşılık gelen ½ değerinin cebirsel gösterimdeki sabit değişim oranına karşılık geldiğini anlamlandırmışlardır.

Doğrusal fonksiyon ile ilgili etkinliği tamamlayan öğrenciler bu etkinlikte oluşturdukları fikirleri El Castillo etkinliğinde uygulamışlardır. Değişim oranının sabit olduğu fikrini temel alarak aralarında ikinci dereceden fonksiyonun ile temsil edilebilecek bir ilişki olan iki nicelik arasında da bir değişim oranı aramışlardır. Ancak ikinci dereceden fonksiyon kavramında sabit değişim oranı olmadığı için nicelikleri farklı şekillerde ilişkilendirmeye çalışmışlardır. İki döngünün öğretim deneyleri doğrultusunda, öğrencilerin El Castillo etkinliği üzerinde çalışarak ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarının değişiminin sabit olması fikrini oluştururlarken geçtikleri öğrenme süreçlerinin Şekil 5'te gösterildiği gibi olduğu görülmüştür.

Eş zamanlı değişen iki niceliği belirleme ve bu nicelikleri eşleme

Eş zamanlı değişen niceliklerin değişimlerinin yönünü karşılaştırma

Eş zamanlı değişen niceliklerin değişim miktalarını belirleme

Değişim miktalarını toplamsal karşılaştırma

Değişim miktalarını çarpımsal karşılaştırma

Sabit değişim oranının ve iki nicelik arasında doğrusal bir ilişkinin olmadığını belirleme

Değişim miktarlarının değişiminin toplamsal karşılaştırma ile sabit olduğunu belirleme

Şekil 5. Onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarının değişiminin sabit olması fikrini oluştururken geçtikleri öğrenme süreçleri

Şekil 5'te görüldüğü gibi öğrenciler ilk olarak bağlamda eş zamanlı değişen nicelikleri belirleyerek bu nicelikleri eşlemişlerdir. Niceliklerden birinin miktarı artarken diğerinin azaldığını dikkate alarak değişim yönünü belirlemişlerdir. Ardından değişim miktarlarını toplamsal olarak ifade ederek karşılaştırmışlardır. Ancak değişim miktarları arasında herhangi bir ilişki görememeleri onları değişim miktarları arasında çarpımsal karşılaştırma yapmaya yönlendirmiştir. Doğrusal fonksiyon kapsamında sabit değişim oranı fikrini oluşturan öğrenciler El Castillo etkinliği üzerinde çalışırlarken iki nicelik arasında sabit değişim oranına ulaşamadıkları için doğrusal ilişkiden söz edilemeyeceğini ifade etmişlerdir. İki nicelik arasındaki değişim miktarlarını toplamsal karşılaştırma ile inceleyerek değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu ortaya çıkarmışlardır.

El Castillo etkinliği kapsamında hem kenar uzunluklarını hem de alanı temsil eden fonksiyonları oluşturmaya çalışan öğrenciler eş zamanlı değişen nicelikleri birbirleriyle eşleme, nicelikleri bağımsız ve bağımlı değişkenlerle eşleme ve analitik düzlemin eksenleri ile eşleme zihinsel eylemlerini gerçekleştirmişlerdir. Birinci döngü kapsamında gruplardan birinde yer alan Enis alan fonksiyonunu temsil eden grafiğin eğri olacağını belirtmiştir.

Enis: Şunlar [analitik düzlemde eşlediği noktalar için] bu kadar birbirine yakın, eşit aralıklarda değiller uzaklıkları.

Araştırmacı 1: Neye göre eşit aralıklarda değiller?

Enis: Kareleri oldukları için aralarındaki fark gittikçe artıyor.

Araştırmacı 1: Öyle düşünüyorsun peki o zaman nasıl olur?

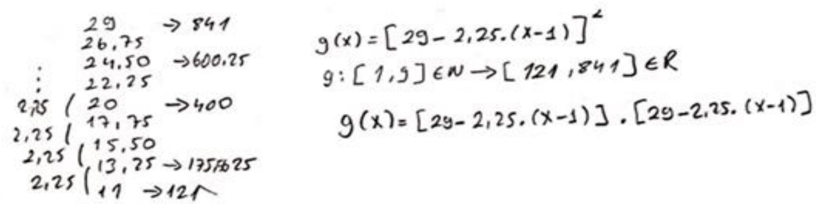
Enis: O zaman azalarak artar, şöyle bir şey olur, [eliyle eğriyi gösteriyor.]

Enis ifadesini gerekçelendirirken fonksiyon ifadesinin x^2'li bir terimi içermesi sebebiyle noktaların aralarındaki farkın giderek artacağını açıklamıştır. Bir başka deyişle, bağımsız değişkenin değerlerindeki artış sabit iken bağımlı değişkenin değerlerindeki artışın sabit olmamasını grafiğin eğri olmasının gerekçesi olarak sunmuştur. Buna karşın, Enis alan değerlerinin artışının azalarak artacağını ifade ederek hatalı bir açıklama yapmıştır.

El-Castillo etkinliği kapsamında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun değişim miktarlarının sabit olmadığını ve değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu anlamlandırmaları beklenmiştir. Ancak alan fonksiyonunda değişim miktarlarına odaklanmamaları etkinlikte revizyona gidilmesi gerekliliğini ortaya çıkarmış ve ikinci döngü kapsamında etkinliğe öğrencileri bu zihinsel eyleme götürecek ifadeler eklenmiştir. Bu doğrultuda Alp ile Can'ın söz konusu zihinsel eylemleri gerçekleştirmeleri sağlanmıştır.

Can: Şey gibi oluyor, [f(x) kenar uzunluğu fonksiyonu]

Alp: iki kenar uzunluğunun çarpımı burada ipucu vermiş [soruyu göstererek]



El Castillo etkinliğinin ikinci döngüdeki uygulamasında kenar uzunluğu ile ilgili fonksiyonları oluştururlarken kenar uzunlukları arasındaki değişime bakan Alp ve Can benzer şekilde taban alanları arasındaki değişimi incelemeye başlamışlardır. Ardışık katların taban alanları arasındaki değişimleri yazmışlar ve hepsinin birbirinden farklı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bir sütun olarak değişimleri yazmaları değişimler arasındaki değişim miktarlarının sabit olduğunu fark etmelerini desteklemiştir. Böylece ikinci döngü ile birlikte doğrusal fonksiyon kapsamında değişim oranını anlamlandıran öğrenciler bu etkinlik ile alan değerlerini inceleyerek ikinci dereceden fonksiyonlar için değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğu fikrini anlamlandırabilmişlerdir.

İkinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösterimini oluşturma ve grafiğin simetrik olmasını fark etme sürecinde öğrencilerin geçtikleri öğrenme süreçleri de Şekil 6'da gösterilmektedir.

Nicelikleri bağımlı ve bağımsız değişken ile eşleme

Bağımlı ve bağımsız değişkenleri analitik düzlemin eksenleri ile eşleme

Niceliklerin değişimlerinin yönünü belirleme

Bağımsız değişkene karşılık gelen niceliği eş parçalayarak elde ettiği değerleri bağımlı değişkenin değerleriyle eşleyerek analitik düzlemde sonlu sayıda nokta oluşturma

Oluşan noktaları ikişer ikişer gruplayarak değişim oranlarını belirleme

Değişim oranlarının sabit olmadığını belirleme

Bağımsız değişkenin eş parçalama sayısını artırarak elde ettiği değerleri bağımlı değişkenin değerleriyle eşleyerek analitik düzlemdeki nokta sayısını sıklaştırma

Bağımsız değişkeni sonsuz eş parçaya ayırarak sonsuz noktanın oluşturduğu sürekli grafiği oluşturma

Oluşturmuş olduğu grafik üzerinde aynı y değerine sahip noktaları belirleme

Aynı y değerine sahip nokta çiftlerini üst üste gelecek şekilde katlayarak eşleme

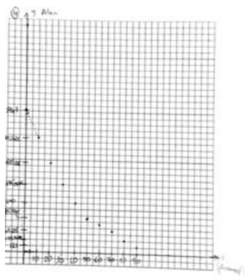
En küçük ya da en büyük y değerine sahip noktadan geçen simetri eksenini fark etme

Nokta çiftlerinin oluşan simetri eksenine uzaklıklarını toplamsal karşılaştırma

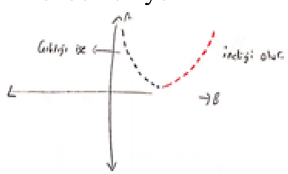
Şekil 6. Onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösterimini oluşturma ve simetrik olmasını fark etme sürecinde geçtikleri öğrenme süreçleri

Şekil 6'da görüldüğü gibi, öğrenciler ilk olarak gerçek yaşam bağlamındaki nicelikleri bağımsız değişken ve bağımlı değişken ile eşleyerek analitik düzlemin eksenlerini bu doğrultuda ifade etmişlerdir. Bağımsız değişkenin değerlerine karşılık gelen değerleri belirleyip bu iki değeri eşlemişler ve analitik düzlemde noktalar oluşturmuşlardır. Sonrasında bağımsız değişkenin sınırlarını değiştirmeden yapılan eş parçalama sayısını arttırmışlar ve bu şekilde elde ettikleri yeni değerlere karşılık gelen değerleri belirlemişlerdir. Bu şekilde analitik düzlemdeki noktaları sıklaştırmışlardır. Bağımsız değişkenin sürekli olması durumda sonsuz noktanın oluşacağı fikriyle grafiği sürekli olacak şekilde çizmişlerdir. Parabolün bir parçasını bu süreçte oluşturan öğrenciler aynı y değerine sahip nokta çiftlerini eşlemişler ve tüm noktaları göz önüne alarak simetrik fonksiyonu çizmişler ve simetri eksenini de oluşturmuşlardır.

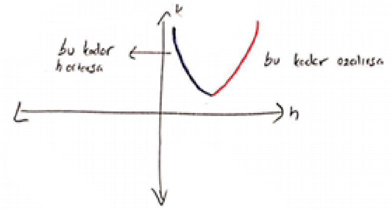
El Castillo etkinliği ile ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini sezdirmek amacıyla noktasal yaklaşımdan sürekliliğe geçişe yer verilmiştir. İkinci döngü uygulaması kapsamında Alp ve Can oluşturdukları basamaklara bağlı alanları her basamaktan tabana paralel çizilen karelerin alanları ile ilişkilendirerek fonksiyonun grafiğini çizmişlerdir.



Araştırmacı:	Nasıl olacak grafiği nasıl olacak seziyor musunuz?
Alp:	Yani şurada çizdiğimiz grafiğin biraz daha..
Can:	Noktaları sıkıştırdığımızı düşünelim.
Araştırmacı:	Neden peki öyle?
Alp:	Çünkü gene aynı şeyde aynı sayılarda aynı artış miktarlarında düşerek aynı şekilde her şey aynı şekilde gerçekleşir sadece birazcık daha irdeledik basamakta ve aynı olması bekleniyor



Çizmiş oldukları grafiğin önceki grafikteki noktaların sıkıştırılması ile elde edildiğini ifade etmişlerdir. Kata bağlı taban uzunluğundan basamağa bağlı taban uzunluğuna geçiş yaparlarken ortaya çıkan fikirlerinden yararlanarak kata bağlı alan fonksiyonun grafiğinden basamağa bağlı alan fonksiyonun grafiğine geçiş yapmışlardır. Öğrenciler herhangi bir yüksekliğe bağlı tabana paralel kare kesitlerinin alanlarına ilişkin fonksiyonu cebirsel olarak kenar uzunluklarına ilişkin fonksiyonun karesi şeklinde doğrudan yazmışlardır. Grafiğin sonsuz noktadan oluşan sürekli ve simetrik bir grafik olduğu sonucuna ulaşmışlardır.



Etkinlikte öğrenciler oluşturulan tabana paralel kare kesitlerin alanlarını noktasal grafikten sürekli grafiğe doğru incelemişlerdir. Böylelikle oluşan fonksiyonun nasıl bir davranış sergilediğini grafiksel olarak yorumlayabilmişlerdir.

4. Tartışma ve Sonuç

İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde nicel muhakemeyi tetikleyecek şekilde tasarlanan bir öğretim dizisinin açıklandığı bu çalışmada öğrenciler öğrenme etkinlikleri üzerine çalışırlarken gerçek yaşam durumlarına ilişkin bilgilerini ve deneyimlerini kullanarak niceliklere anlamlar yüklemişlerdir. Tasarım tabanlı araştırma boyunca gerçekleştirilen öğretim deneylerinde öğrenciler ilk olarak gerçek yaşam bağlamlı etkinliklerin içerdikleri durumlar üzerine düşünmüşler ve durumların matematiksel açıklaması için yararlanabilecekleri değişkenleri belirlemişlerdir. Öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını matematiksel modellerle açıklarken durumlara yönelik yorumlarının nicel muhakemelerini desteklediği görülmüştür. Çalışmada öğrencilerin derinlik-basınç-oksijenin çözünme miktarını içeren gerçek yaşam durumları ile doğrusal fonksiyon kavramına, iki doğrusal fonksiyonun çarpımını gerektiren kenar ve alan niceliklerini içeren gerçek yaşam durumları ile de ikinci dereceden fonksiyon kavramına ilişkin zihinsel eylemleri tetiklenmiştir. Bu etkinliklerde oluşturdukları matematiksel modelleri yorumlamaya ve doğrulamaya çalışmaları öğrencilerin kavramları yeniden gözden geçirmelerine ve gerektiğinde revize etmelerine ortam hazırlamıştır. Bununla birlikte, modelleme süreci ile nicel muhakeme arasındaki ilişki sadece bu yönüyle karşımıza çıkmamıştır. Öğrencilerin süreçte gerçekleştirdikleri nicel muhakemeleri de gerçek yaşam durumları içerisindeki kavramları keşfederek matematiksel modelleri oluşturmalarını desteklemiştir. Weber ve arkadaşları (2014) öğretim süreçlerinde öğrencileri nicel muhakemeye yönlendirmenin gerçek yaşam durumlarının matematiksel modellerini geliştirmelerine ve keşfetmelerine yardımcı olacağını ifade etmişlerdir.

Öğrenciler matematiksel kavramları zihinlerinde oluşturdukları şekliyle anlamlandırdıkları için kavramları oluşturma aşamasında üzerinde çalıştıkları gerçek yaşam bağlamına ilişkin bilgileri önemli olmuştur. Bağlamlara ilişkin öğrencilerin deneyimleri/bilgileri düşünme becerilerine ve nicel muhakemelerine yön vermiştir. Bu doğrultuda, nicel muhakeme perspektifine dayalı uygulanacak modelleme etkinliklerinin bağlamları üzerine öğrencilerle tartışmalar gerçekleştirmek ve gerektiğinde bağlamla ilgili daha fazla bilgilendirme yapmak model ve kavram oluşturma süreçlerine destek olabilecektir. Çalışmada nicelikler öğrencilerin kolaylıkla yorumlayabilecekleri bağlamlar içerisinde sunulduğu için öğrenciler ilgili nicelikleri ve aralarındaki ilişkileri muhakeme edebilmişlerdir. Bu ilişkilendirmeleri de onların kavramları anlamalarını desteklemiştir. Dolayısıyla gerçek yaşam bağlamlı etkinliklerde sadece ilgili bağlamın öğrenciler için yorumlanabilir olması değil, aynı zamanda etkinliklerin kavramla ilgili fikirleri açık bir şekilde sunuyor olmasının da önemli olduğu görülmüştür. Bir başka deyişle, bu süreçte öğrencilere sunulan etkinliklerin kavram ile ilgili nicelikleri ve fikirleri içermesinin öğretme sürecinin etkili bir şekilde yürütülmesindeki en temel hususlardan biri olduğu belirlenmiştir. Thompson (1990) nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri içeren nicel muhakemenin öğretimin bir amacı olarak ele alınması gerektiğini ifade ederek nicel muhakemenin gerçekleşmesini sağlayan zihinsel operasyonların ve kavramsal yapıların detaylandırılmasını gerekli görmektedir. Çalışmada da matematiksel modelleme etkinliklerinin ikinci dereceden fonksiyona ilişkin yapılan kavramsal analize dayalı ortaya çıkarılan zihinsel eylemleri içerecek şekilde tasarlanması öğrencilerin nicel muhakemelerini tetiklemiştir.

Gerçek yaşam bağlamlı etkinlikler dinamik durumları içerdiği için öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri anlamlandırmalarına ve fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini oluşturmalarına imkan vermiştir. Thompson (1994) fonksiyonların öğrenilmesi için fonksiyonu içeren anlamlı bir bağlamın uygun bir başlangıç noktası olacağını dile getirmiştir. Çalışmamızda öğrenciler etkinlikler kapsamında birbiriyle ilişkili olarak eş zamanlı değişen iki niceliği ve bu niceliklerin birbirine bağlı nasıl değiştiğini belirlemeyi modelleme sürecinin en başında gerçekleştirmişlerdir. Oehrtman ve arkadaşları (2008) analiz dersindeki öğrencilerinin dinamik olarak değişen durumlarla ilgili akıl yürütmeyi içeren eş zamanlı düşünmeye yönelik sıklıkla bir değişkeni bağımlı olduğu diğer bir değişken ile koordine etme ve bir değişkenin değişim yönünü diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme zihinsel eylemlerini gerçekleştirdiklerine ulaşmışlardır. Benzer şekilde, Ellis (2011) de alanyazında önemine vurgu yapılan eş zamanlı değişim fikrinin birbiriyle ilişkili niceliklerdeki değişimi göstermenin bir yolu olarak fonksiyon anlamını geliştirmede güçlü bir mekanizma olduğunu belirtmektedir. Bu kapsamda çalışmamızdaki etkinliklerde öğrencilerin eş zamanlı değişim ve eşleme fikrini birlikte oluşturmalarını dolayısıyla fonksiyon kavramını anlamalarını sağlamıştır. Dinamik ilişkileri içeren durumlar doğrultusunda öğrencilerin oluşturdukları kavramları kullanmaları öğrenme süreçlerinde yorumlamadan ezberledikleri bilgileri kullanmalarının ve alışılmış eylemleri sergilemelerinin önüne geçmiştir. Çünkü öğrenciler bu süreçte kavramların içerdiği temel fikirler üzerine ayrıntılı olarak düşünme ihtiyacı duymuşlar ve bu fikirlerden yararlanmışlardır. Belirledikleri bağımlı ve bağımsız değişkenlerin eş zamanlı değişimi fikrine dayalı olarak fonksiyon kavramını ifade etmişlerdir. Çalışmamızda doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine ilişkin eş zamanlı değişim, eşleme, değişim oranı gibi nicelikleri içeren bir etkinlikle öğrenilmesi ikinci dereceden fonksiyon kavramının kavramsal anlaşılmasını desteklemiştir. Bu doğrultuda ikinci dereceden fonksiyonların öncesinde doğrusal fonksiyona ilişkin fikirlerin oluşturulması için doğrusal ilişkileri içeren gerçek yaşam bağlamları üzerinde çalışılmasının gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu etkinlikte kavramın oluşturulması için gerekli olan veriler öğrencilere sunulduğu için öğrenciler doğrudan belirledikleri değişkenler arasındaki matematiksel ilişkileri oluşturmaya yönelik çalışmalar yapmışlardır. Oehrtman ve arkadaşları (2008) öğrencilerin değişkenlerin değişim miktarlarını birbirleriyle ilişkilendiren etkili muhakemeler yapamadıklarını belirtmişlerdir. Bu sonuçlar da öğrencilerin değişim oranına ilişkin muhakemelerini güçlendirmek için öğretimin içeriğinin destekleyici olması gerekliliğini göstermiştir. Çalışmamızda öğrenciler değişkenleri belirledikten sonra değişimin yönünü ve değişim miktarlarını incelemişlerdir. Sonrasında da değişim miktarlarının birbiri ile ilişkisini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Çünkü değişim miktarlarını incelememeleri halinde ulaştıkları matematiksel modelin gerçek yaşam durumunu açıklayamadığını görebilmişlerdir.

Tasarlanan öğretim dizisi üzerinde çalışan öğrenciler değişkenleri ve değişkenlerin değişim miktarlarını çarpımsal olarak karşılaştırma yaklaşımını sürekli olarak sergilemişlerdir. Ek olarak, alan fonksiyonunda Δx'in bir birimlik değişiminde Δy'nin değişiminin sabit olduğunu ifade etmeleri nicel muhakemelerinin güçlü bir göstergesi olmuştur. Öğrencilerin bu çıkarımları doğrultusunda, bir doğrusal fonksiyonda sabit değişim oranı olduğu çıkarımının ikinci dereceden fonksiyondaki değişimlere yönelik çıkarımları desteklediği görülmüştür. Dünya'nın Dibi etkinliğindeki fikirler ile El Castillo etkinliğindeki fikirleri ilişkilendirerek bilgilerini transfer ettikleri ve bu sayede bu öğrencilerin değişim miktarlarının değişimine geçiş yapabildikleri söylenebilir. Hohensee (2016) de ikinci dereceden fonksiyonun belirli bir aralığı boyunca ortalama değişim oranı o aralıkta bir doğrusal fonksiyon tanımladığını ifade etmiş ve değişim miktarlarına ikinci dereceden fonksiyonlarda ele alınması gerekliliğini vurgulamıştır. Öğrencilerin değişen değişim oranları ile ilgili soruları nasıl yanıtlayacaklarını araştıran Johnson (2013) öğretmenlerin öğrencilerinin değişime bağlı muhakeme kullanımlarını güçlendirerek değişim oranlarındaki değişimi anlamlandırmalarını desteklemeleri gerektiğini vurgulamıştır. Buna karşın, Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018) ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi kapsamında değişim miktarlarının değişimine ilişkin hiçbir vurgu yapmamaktadır. Bu doğrultuda okullarda bu niceliklerin öğrencilere kazandırılması yönünde öğretimler yapılması beklenmemektedir. Doğrusal fonksiyonların ve ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmesini destekleyebilmek için öncelikle öğretim programlarında revizyonlara gidilmesi gerektiği ön plana çıkmaktadır. Bu doğrultuda Nielsen (2015) de matematik eğitimcilerinin ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi için öğrencilerin anlamalarını ve muhakeme yollarını belirleyen ve tanımlayan araştırma tabanlı bir çerçeve geliştirmediklerini dile getirmektedir. Dolayısıyla çalışmamızın ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi ile ilgili alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Geliştirilen öğretim dizisinin öğrencilerin nicel muhakemelerini harekete geçirerek onların ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmelerini desteklediği ortaya çıkmıştır. Çalışma kapsamında ikinci dereceden fonksiyonlara geçiş doğrusal iki fonksiyonun çarpımından ikinci dereceden fonksiyonlara ulaşmaya ve onunla ilgili nicelikleri değerlendirmeye yönelik olmuştur. Bu bağlamda kullanılan karenin kenar uzunluğu ve alan ilişkisi gibi çarpım fikrine yöneltecek gerçek yaşam bağlamları çeşitlendirilebilir.

Öğrencilerin etkili zihinsel eylemlerinin ortaya çıkarılması için bu çarpım fikrini içeren bağlam ne olursa olsun etkinlik boyunca yansıtıcı soyutlama ve nicel muhakeme perspektifleri göz ardı edilmemelidir. Çünkü öğrencilerin kavramları anlamaları için ilgili etkinlikler üzerinde çalışırlarken yansıtıcı soyutlama ve nicel muhakeme yapmaları önem taşımaktadır. Bu doğrultuda, ortaya koyulan öğretim dizisinin öğretmenler tarafından uygulanabilmesi için öncelikli olarak öğretmenlerin kavramsal çerçevedeki yapıları benimsemeleri ve anlamaları gerekmektedir. Aksi halde aynı düzeydeki öğrenciler olsa bile benzer sonuçların çıkmasını beklemek anlamlı olmayacaktır. Öğrenci düşüncelerine uygun bir şekilde öğretim tasarlama ve uygulama süreçleri için çalışmada dikkate alınan perspektifler oldukça önemlidir. Matematik öğretmenlerinin bu perspektifleri farklı kavramların öğretimi sürecinde de dikkate alarak uygulamalarına yansıtabilmeleri için bu perspektifler çerçevesinde hazırlanan mesleki gelişim programlarına katılmaları sağlanabilir. Bunlara ek olarak söz konusu öğretim dizisi geliştirilirken fen lisesindeki öğrencilerin zihinsel eylemleri göz önüne alınmıştır. Bu öğretim dizisindeki etkinliklerin diğer lise türlerindeki öğrenci gruplarına uygulanması önerilmektedir. Bu sayede, farklı öğrenci gruplarıyla gerçekleştirilen uygulamalarda ortaya çıkabilecek farklılıklar değerlendirilebilir ve öğretim dizisi farklı okul türlerinde daha etkili bir şekilde uygulanabilir hale getirilebilir. Bunların yanında, ortaya koyulan öğretim dizisinin matematik öğretmenleri tarafından uygulanmasıyla da bu amaca hizmet edilebileceği düşünülmektedir. Gerçek sınıf ortamlarında öğretim süreçlerini yürüten matematik öğretmenlerinin tasarım prensiplerini benimseyerek bu öğretim dizisini uyguladıkları süreçler incelenebilir. Böylelikle hem öğretmen bakış açısıyla öğretim dizisi için gerekli görülen revizyonlar yapılabilir hem de öğretmenlerin tasarım prensiplerini daha iyi benimsemeleri sağlanarak farklı kavramların öğretimlerini bu perspektifler doğrultusunda daha etkili hale getirmeleri desteklenebilir.

An Instructional Sequence Triggering Students’ Quantitative Reasoning during Learning of Quadratic Functions

Extended Abstract

Introduction

Quadratic functions are one of the nonlinear functions that students encounter first and a strong understanding of quadratic functions is foundational to be successful at many mathematical concepts (Nielsen, 2015). Along with the importance of acquiring the quadratic functions, the related literature indicates the difficulties faced by the students and the limitations regarding their understanding. Ellis (2011) emphasized that reasoning process about quantitative relations could support the students’ flexible thinking related to the quadratic functions. However, in the literature of mathematics education, a research-based framework defining the students’ understanding and reasoning of the quadratic functions was not designed. In this direction, The purpose of this study is to design an instructional sequence triggering students’ quantitative reasoning in the process of learning quadratic functions. The study was conducted as a design-based research, following a cyclical process.

Method

The design-based study consisted of three phases: the design, implementation, and analysis phases. During the design phase, a hypothetical learning trajectory was developed through a review of the related literature on quadratic functions, observations of a mathematics teacher's instruction of quadratic functions, a clinical interview conducted with an 11th grade student, and interviews with pre-service and in-service mathematics teachers. Then, based on real-life contexts, four logico-mathematical learning tasks were developed, with accompanying assessment tasks to evaluate the students’ understanding. The implementation phase of this design-based research consisted of two consecutive cycles. The first cycle was carried out to evaluate the success of the instructional sequence in supporting student learning in a class. Following the implementation of the instructional sequence in the class, the instructional sequence was further revised based on the students’ understanding of the concepts. In the second cycle of the implementation phase, two 10th grade students worked on the revised set of tasks in pair. Hence, the video recordings taken during the teaching experiments, the researchers’ observation notes, the clinical interviews, and the students’ reflective journals constituted the data sources of the study. In the data analysis process of the study, the constant comparison method simultaneously conducted with the data collection process was used. The data analysis process included two types of analysis. First, concurrent to the data collection, an *ongoing analysis* was conducted by using constant comparison method. Throughout the data analysis process, the focus was on the students’ understanding in the context of the tasks, the quantities that were constructed or that were expected to be constructed, and the quantitative operations in the unstructured analyses. Second, a *retrospective analysis* of the teaching experiment data was conducted, with a focus on students’ quantitative reasoning.

Discussion and Conclusion

As a result of the data analysis, the instructional sequence for quadratic functions was finalized. Because the tasks were grounded in real-life contexts involving dynamic situations, they contributed to the students' understanding of functional relations and helped them construct the idea of covarying change in the functions. Thompson (1994) has stated that a meaningful context involving the function is an appropriate starting point to learn functions. The students continually performed multiplicative comparisons between the variables and the amounts of changes in the variables in the context of the tasks. In addition, the students constructed the quadratic function through multiplication of two linear functions by drawing on the idea of finding the area of a square. The students showed evidence of strong quantitative reasoning, as indicated by their recognition of and expression that there was a constant rate of change between Δx and Δy values in the area function. Hohensee (2016) have underlined that average rate of change in a specific interval of a quadratic function defines a linear function in that interval and emphasized the necessity of addressing the amounts of change in the quadratic functions. The students constructed the quantities such as vertex and axis of symmetry of a quadratic function with respect to the path a ball follows. Hence, the instructional sequence designed in this study seemed to have supported the participant students' conceptual understanding of quadratic functions. Therefore, the instructional sequence may be a helpful resource for mathematics teachers in supporting their students' understanding of quadratic functions, provided that they revise the instructional sequence according to their own classroom context. In addition, mathematics teachers may also take into account the main principles of this study when designing a learning environment for teaching other mathematical concepts, as well.

Kaynaklar/References

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi* (1. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2005). *Key aspects of knowing and learning the concept of function.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Charmaz, K. (2011). Grounded theory methods in social justice research. *The Sage Handbook of Qualitative Research*, *4*(1), 359-380.

Common Core State Standards Initiative [CCSSI]. (2010). *The common core state standards for mathematics.* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. Retrieved April 4, 2016 from http://www.corestandards. org/the-standards/mathematics.

Design-Based Research Collective [DRBC]. (2003). Design based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215-235). New York: Springer.

Ellis, A. B., & Grinstead, P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(4), 277-296.

Eraslan, A. (2005). *A qualitative study: Algebra honor students' cognitive obstacles as they explore concepts of quadratic functions* (Unpublished doctoral dissertation). The Florida State University College of Education, USA.

Eraslan, A. (2007). The notion of compartmentalization: The case of Richard. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(8), 1065-1073.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London: Routledge.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510–524.

Hohensee, C. (2016). Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 42*, 69-91.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Johnson, H. L. (2013). Reasoning about quantities that change together. *Mathematics Teacher, 106*(9), 704-708.

Konold, C., & Johnson, D. K. (1991). Philosophical and psychological aspects of constructivism. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 1-13). New York: Springer.

Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics. *Australian Mathematics Teacher, 63*(2), 19-24.

Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(2), 85-119.

Metcalf, R. C. (2007). *The nature of students' understanding of quadratic functions* (Unpublished doctoral dissertation). The State University of New York at Buffalo, USA.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017). *Ortaöğretim 10. sınıf matematik ders kitabı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Mitchelmore, M., & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal, 12*(3), 254-268.

Mojica, G. (2010). *Preparing pre-service elementary teachers to teach mathematics with learning trajectories* (Unpublished doctoral dissertation). North Carolina State University, USA.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138.

Moore, K. C., Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. *Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, NC: North Carolina State University.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Research Council [NCR]. (2007). *Taking science to school*. Washington, DC: National Academy Press.

Nielsen, L. E. J. (2015). *Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning* (Unpublished doctoral dissertation). Washington University, Missouri, USA.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Özaltun-Çelik, A., & Bukova-Güzel, E. (2017). Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. International *Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 122-134.

Sevim, V. (2011). *Students' understanding of quadratic functions: A multiple case study* (Unpublished doctoral dissertation). The University of North Carolina, USA.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*,114-145.

Simon, M. (2006). Pedagogical concepts as goals for teacher education: Towards an agenda for research in teacher development. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 730-735). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 102*, 1–41.

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 711-733.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 905-917.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic.* Progress report to the National Science Foundation. San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Thompson, P. W. (1991). To experience is to conceptualize: Discussions of epistemology and experience. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 260–281). New York: Springer-Verlag.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2013). Why use f (x) when all we really mean is y. *OnCore, The Online Journal of the AAMT*, 18-26.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Netherlands: Springer.

von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese, 80*(1), 121-140.

von Glasersfeld, E. (2002). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Bristol, PA: Routledge Falmer.

Weber, E., Ellis, A., Kulow, T., & Ozgur, Z. (2014). Six principles for quantitative reasoning and modeling. *Mathematics Teacher, 108*(1), 24-30.

Yıldırım, A. ve Şimşek H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-45.

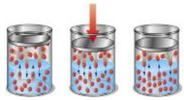
Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 435–448.

Ek 1. Dünya'nın Dibi

1.Aşama

Kanadalı yönetmen James Cameron, 1989 yılında çektiği ve okyanusların derinliklerinde keşif yapan bir araştırma ekibini anlattığı Abyss filmine konu olan, "Dünya'nın Dibi" olarak bilinen 10.994 metre derinlikteki Mariana Çukuru'na 2012 yılında özel yapım Challenger Deep isimli denizaltı ile dalış yapmış ve dip noktasında 6 saat kalmıştır. Denizaltı olmadan bu dalışı yapmaya kalksaydı derinlerden su yüzeyine çıktığında ani basınç değişiminden dolayı vurgun (dekompresyon hastalığı) yiyebilirdi.

Bunun nedeni ise derinliklere inildiğinde her 10 metrede basıncın 1 ATM artmasına bağlı olarak oksijen, karbondioksit ve azot gibi gazların dokularda ve kanda daha fazla çözünmesidir. Yüksek basınçlı derinliklerden aniden düşük basınçlı ortama geçildiğinde, kanda ve dokulardaki çözünmüş gazlar, çözünmüş durumdan çıkıp, kabarcıklar şekline dönüşür. Bu kabarcıkların genişlemesiyle hücre şişer ve patlayarak ortadan kalkar ve vücutta çeşitli hasarlara neden olabilir. Scuba (Self Contained Underwater Breathing Aparatus- Su altında kendi kendine yetebilen soluma donanımı) dalışı yani tüplü dalış yapanların da bu basınç değişikliğini dikkate almadıkları durumlarda kötü sonuçlarla karşılaştıkları görülmektedir. 2006 yılında Fenerbahçe Kulübü eski Başkanı Ali Şen ile birlikte tüplü dalış yapan Bodrum Clup Flipper'ın sahibi Ahmet Bayer 53 metreye inmiş ve vurgun yemiştir. Ardından basınç odasına alınarak hiperbarik tedavisine başlanmıştır.



Hiperbarik tedavisinde tamamen kapalı bir basınç odasında 1atmosfer basınçtan daha yüksek bir basınç altında, maske, başlık veya endotrakeal tüple (solunumu güvenlik altına almak veya solunumu kontrol etmek amacıyla trakea yerleştirilen içine tüp) aralıklı olarak oksijen solutulmaktadır. Bu ortamda % 100 oksijen solunduğunda plazmada oksijenin çözünürlüğü artar. Bunun yanında, hacmi genişleyen nitrojen kabarcıklarının yeniden erimiş nitrojen duruma geçmesi sağlanır.

Oksijenin normal ortamda ve hiperbarik ortamda bazı basınçlarda kandaki çözünme miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Basınç (ATM)	Normal ortam (ml/dl)	Hiperbarik ortam (ml/dl)
1	0.31	2.07
1.3	0.46	2.79
1.5	0.56	3.27
2.4	1.01	5.43
3.1	1.36	7.11

a) Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz.

b) Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi gösteren grafiğini çiziniz. Grafiği cebirsel karşılaştırarak yorumlayınız.

c) Tablodaki normal ortam verilerine göre oksijenin çözünmesi ile basınç arasında nasıl bir ilişki vardır? Matematiksel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz matematiksel ifadenin bütün değerler için uygun olup olmadığını inceleyiniz.
d) Bu ilişkinin grafiğini çiziniz ve nasıl çizdiğinizi açıklayınız. Grafiği cebirsel ifadeyle ve tabloyla karşılaştırarak yorumlayınız.
e) Mariana Çukuruna serbest dalış yaptığında/yapabildiğini düşündüğümüzde dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olur?
f) James Cameron hiperbarik bir ortamda olsaydı aynı derinlikte dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olurdu?

2.Aşama

a) Etkinliğin birinci aşamasında oluşturmuş olduğunuz üç fonksiyonu temsil edecek genel ifadeyi x, f(x) değişkenlerini ve a, b katsayılarını kullanarak yazınız. a ve b katsayılarının ve x ve f(x) değişkenlerinin anlamları doğrultusunda fonksiyonu yorumlayınız. Bu değerler grafiksel gösterimde neye karşılık gelmektedir? Açıklayınız.
b) Yazmış olduğunuz doğrusal fonksiyon ifadesinde x'in katsayısının 2a olduğunu düşününüz. İlk fonksiyon ile karşılaştırarak farklılıklarını ve benzerliklerini nedenleriyle birlikte yorumlayınız.
c) $ax + b = 0$ gösterimine uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yazınız ve bu denklemle ilişkili bir doğrusal fonksiyon oluşturarak aralarındaki fark ve benzerlikleri inceleyiniz.
d) Yazdığınız denklemle çözüm kümesi aynı olacak farklı denklemler oluşturunuz ve bu denklemler arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.
e) Bu denklemlerin tümünü gösteren genel bir matematiksel ifade yazınız.
f) Yazdığınız fonksiyonun (c basamağında) x eksenini kestiği noktadan geçen başka doğrusal fonksiyonlar yazınız. Bu fonksiyonları karşılaştırınız, farklılık ve benzerliklerini yazınız.
g) (e) ve (f) basamaklarında ulaştığınız sonuçları dikkate alarak ne gibi çıkarımlarda bulunursunuz?
h) Doğrusal fonksiyon ve kritik özelliklerine yönelik her aşamada yaptıklarınızla ilgili olarak bir genelemeye ulaşabilir misiniz? Ayrıntılarıyla yazınız.

Ek 2. Ölçme-Değerlendirme I

Amerika Birleşik Devletleri ve Kanada dışında dünyadaki bütün ülkeler tarafından kabul edilen ISO 216 metrik biçimi kağıt boyutlarında kullanılmak üzere kabul edilmiştir. Kağıt boyutları metrik sisteme göre DIN-A ve DIN-B normunda standart olarak belirlenmiştir. DIN-A formundaki kağıtlar küçükten büyüğe doğru A6, A5, A4, A3, A2, A1, A0 olarak sıralanır.

Kağıt Boyutu	Eni	Boyu
A0	841 mm	1189 mm
A1	594 mm	841 mm
A2	420 mm	594 mm
A3	297 mm	420 mm
A4	210 mm	297 mm
A5	148 mm	210 mm

Tablo. DIN-A normundaki kağıtların boyutlarına ilişkin bilgiler

a) Her bir kağıdın eni ve boyu arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz ve grafiğini çiziniz. Yaptıklarınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
b) Her bir kağıdın alanını bir kenar uzunluğuna bağlı olarak belirten matematiksel ifadeyi yazınız ve grafiğini çiziniz.
c) Oluşturduğunuz alan fonksiyonunu doğrusal iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade ederek bu fonksiyonların tümünün grafiklerini $\mathbb{R}'$den $\mathbb{R}'$ye olacak şekilde aynı analitik düzlemde gösteriniz. Bu grafikleri nasıl yorumlarsınız?

Not: İşlemlerinizi yaparken ulaştığınız sonuçları onda birler basamağına yuvarlayarak yapınız.