Bir Matematiksel Problem Durumu: Kesik Üçgenler[1]

Sümeyye Gürhan[2] ve Menekşe Seden Tapan Broutin[3]

Makale geçmişi
Makale geliş tarihi: 6 Temmuz 2017
Yayına kabul tarihi: 27 Eylül 2017
Çevrimiçi yayın tarihi: 5 Ekim 2017

Öz: Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının bir matematiksel problem durumu karşısında hangi kavrama türlerini ne şekilde kullandıklarını incelemek ve öğretmen adaylarının kullandıkları kavrama türüne göre hangi mantık basamağında nasıl işlem yaptıklarını açığa çıkarmaktır. Bu çalışmada belirli bir durumla ilgili sonuçlar ortaya koyulmaya çalışıldığı için durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Çalışmaya Türkiye'nin kuzeybatısında bulunan bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 46 öğrenci katılmıştır. Çalışma verileri öğretmen adaylarına dağıtılan çalışma yaprakları ile toplanmıştır. Araştırma bulgularına göre, her öğrenci verilen matematiksel bir durumu anlamada farklı kavrama türlerini kullanmaktadır. Ayrıca öğrencilerin kavrama türlerine göre üç farklı mantık basamağında işlem yaptıkları görülmüştür. Araştırma sonucunda kısmen ortaya çıkarılan durum öğrencilerin geometrik bir problemi çözerken kullandıkları kavrama türünün problem çözümünde önemli bir etkiye sahip olduğudur. Bu sebeple bir problem durumunda öğrencilerin doğru sonuca ulaşabilmeleri için öncelikle onların probleme bakış açıları ve problemi kavrama türleri geliştirilmelidir.

Anahtar Kelimeler: Matematik öğretmeni adayları, geometrik problem çözme, kesik üçgen problemleri, kavrama türleri, evre içi-evreler arası-evreler ötesi düzeyler

DOI: 10.16949/turkbilmat.327037

Abstract: The aim of this study is to investigate the types of cognitive apprehension that pre-service mathematics teachers have in the face of a mathematical problem situation and in what ways they use them, and to reveal that which developmental logic stages they have and how they operate on them according to types of apprehension they use. In this study, the case study was used because the results related to a certain situation were tried to be revealed. The data obtained were analyzed descriptively. 46 pre-service teachers who were enrolled in Elementary Mathematics Teaching Department in a state university located in the north-western part of Turkey participated in the study. In the study, the data was collected with worksheets distributed to pre-service mathematics teachers. According to findings of this study, each pre-service teacher uses different types of cognitive apprehension in the understanding of a given mathematical situation. It has also been observed that the pre-service teachers are operating at three different stages of developmental logic according to the types of apprehension. As a result of the research, it is partly revealed that the type of cognitive apprehension the students use when solving a geometric problem has an important effect on solving the problem. For this reason, in order to enable the students to reach the correct result in the event of a problem, firstly their perspective on problem and types of cognitive apprehension should be developed.

Keywords: Pre-service teachers, geometric problem solving, truncated triangle problems, types of cognitive apprehension, intra-inter-trans stages.

See Extended Abstract

1. Giriş

Muhakeme kelimesi oldukça geniş bir kullanım alanına sahiptir. Herhangi bir hareket, deneme yanılma ya da bir zorluğu aşmak için kullanılan prosedür genellikle muhakemenin bir formudur; daha açık olmak gerekirse verilen bir bilgiden yeni bir bilgi

[1]Bu çalışma 3. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildirinin genişletilmiş halidir.
[2] Doktora öğrencisi, Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi, Türkiye smygrhn@gmail.com
[3] Yrd. Doç. Dr., Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi, Türkiye tapan@uludag.edu.tr

elde etmeyi sağlayan herhangi bir süreç muhakeme olarak adlandırılır (Duval, 1998). Muhakeme türlerinden biri olan geometrik muhakeme ise genel manada geometrik şekil ve cisimleri tanıma ve bunlar arasındaki ilişkileri belirleyebilme anlamına gelmektedir (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013).

Öğrencilerin geometriyi istenilen düzeyde kullanabilmeleri onların geometrik muhakeme yapabilme becerilerine bağlıdır ve bu becerilerinin geliştirilmesi geometri öğretiminde en çok dikkat edilmesi gereken kısımdır. Bu hususta literatürde birtakım çalışmalar yer almaktadır. Bu çalışmaların bir kısmı öğrencilerin geometrik muhakeme örneklerini incelerken (Balacheff, 1988; Deliyianni ve ark., 2011; Duval, 1988; Karpuz, Koparan ve Güven, 2014; Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2013; Or, 2013; Panaoura & Gagatsis, 2009), diğer kısmı geometrik muhakemenin öğrencilere nasıl kazandırılacağı (Chen & Herbst, 2013; Duval, 1994; Gallagher, 2015; Köse, Uygan ve Özen, 2012; Magdaş, 2015; Samson, 2010) konusunda yürütülmüştür. Dinamik geometri ortamında birtakım etkinlikler tasarlayan Or (2013), bu etkinliklerin öğrencilerin işlevsel kavrama türünü kullanarak muhakeme yürütmelerine ve böylelikle geometri öğretiminin geliştirilmesine katkı sağladığını belirtmiştir. Deliyianni ve arkadaşlarının (2011) yürüttüğü çalışma ise, geometrik bir şekli anlamanın algısal ve sıralı kavramadan ziyade işlevsel kavramayla daha güçlü bir bağlantısının olduğunu ortaya koymuştur. Bunun yanı sıra Panaoura ve Gagatsis (2009), geometrik muhakemeleri algısal kavramaya dayanan öğrencilerin hatalı çözümlere ulaştıklarını belirtmişlerdir. Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou ve Panaoura (2009) çalışmalarında geometrik şekli anlamada kavrama türlerinin rolünü incelemişlerdir. 1086 ilköğretim birinci ve ikinci kademe öğrencisinin katıldığı çalışmada ilköğretim birinci kademe öğrencilerinin verilen görevlerde algısal kavramayla hareket ettikleri ancak ilköğretim ikinci kademedeki öğrencilerin geometrik bir şekli anlamada algısal, işlevsel ve söylemsel kavramayı kullanabildikleri ifade edilmiştir. Bir öğrencinin farklı kavrama türlerine sahip olabileceği dikkate alındığında bu kavrama türleri arasındaki geçişin öğrencilerin geometrik muhakemelerinin nasıl şekillendiğini anlamada yardımcı olabileceği söylenebilir. Nitekim Samson (2010) geometrik örüntü problemlerinin çözümünü incelediği çalışmasında, farklı kavrama türleri arasındaki geçişin öğrencilerin geliştirdikleri çözüm yolları için önemli olduğunu belirtmiştir.

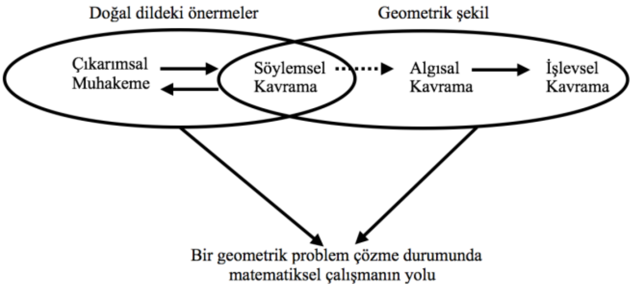
Öğrencilerin geometrideki muhakemelerinin incelenebilmesi için birçok farklı geometrik problem durumu seçilebilir. Bu durumlardan birisi literatürde kesik üçgen problemi (the truncated triangle) olarak yer edinmiştir. Balacheff (1988, 1991) çalışmasında bir köşesi eksik olan üçgenin çevresinin hesaplanması problemini ortaya atmıştır. Balacheff (1988), orta okul öğrencileriyle yürüttüğü çalışmasında öğrenci cevaplarında en çok rastlanan öğrenci hatasının kâğıdın kenarını çözümde kullanma olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca bu soru için temel öğrenci güçlüğünün verilen eksik üçgen için, tamamlanmış, izometrik bir model üçgen çiziminden (zihinsel ya da fiziki olarak) kaynaklandığını belirtmektedir. Balacheff'in çalışmasındaki problem Grenier (2010) tarafından daha da zorlaştırılarak iki köşesi ve üç köşesi kesilmiş üçgenin çevresinin hesaplanması olarak genişletilmiştir. Grenier (2010) çalışmasında bu problemlerin farklı çözüm yollarını sunmaktadır. Kesik üçgen problemi hem farklı çözüm yolları sunması hem de ilgi çeken bir problem olması dolayısıyla bu çalışmada kullanılmak üzere seçilmiştir.

1.1. Kavramsal Çerçeve

Duval bilişsel modelinde geometrik muhakemenin algısal boyutlarının da ele alındığı ayrı bir sınıflama vermektedir. Bu sınıflamada Duval (1995, 1999) birbiriyle hiyerarşik ilişkisi bulunmayan dört algısal süreç tanımlamıştır. Bu süreçlerden her biri bir şeklin matematiksel bilgisinin anlaşılmasında farklı işlevlere sahiptir ve problem çözümünde etkileşimli olarak hareket etmektedirler (Güven ve Karpuz, 2016). Bu algısal süreçler bir şeklin nasıl kavrandığı ile ilgili olup, dört farklı kavrama türü söz konusudur. Bunlar; algısal, söylemsel, sıralı ve işlevsel kavramadır.

- *Algısal kavrama:* Şekle ilk bakışta elde edilen bilgileri içeren bu aşama şekli isimlendirme ve şeklin alt şekillerinin belirlenmesi gibi becerileri kapsar. Bu kavramayla alt şekiller arasındaki ilişkiler fark edilememektedir (Duval, 1995).
- *Sıralı kavrama:* Bu kavrama türüne bir şekli inşa ederken ya da onun yapısını tanımlarken ihtiyaç duyulur. Burada farklı şekilsel birimlerin ortaya çıktığı özel bir sıra vardır. Şeklin parçalarının organizasyonu algısal kurallara değil, teknik kısıtlara ve matematiksel özelliklere dayanır (Duval, 1995).
- *Söylemsel kavrama:* Bir çizimde temsil edilen matematiksel özellikler algısal kavramayla belirlenemez. Bu sebeple şekille ilgili ek açıklamalar verilmeli ve diğerleri verilen özelliklerden çıkarılmalıdır. Çünkü şekille ilgili bazı bilgiler olmadan geometrik şekil belirsizdir ve bu bilgiler olmadan kişiler aynı şeyi görmeyebilir (Duval, 1995).
- *İşlevsel kavrama:* Herhangi bir geometrik şekle bakıldığında çözüm için bir şeyler sezinlenebilmesi işlevsel kavrama aracılığıyladır. Bu kavrama türü verilen şekli çeşitli yollarla dönüştürmeye dayanır. Bunlar; şekli parçalarına ayırıp bu parçaları başka bir şekille birleştirmek (parça-bütün), şekli büyütüp küçültmek (optik) ve şeklin pozisyonunu değiştirmek (konumsal) gibi durumlardır ve bu dönüşümlerin hepsi zihinsel olarak, fiziksel olarak ya da çeşitli işlevler aracılığıyla yapılabilir (Duval, 1995, 1999). Duval'e (1998) göre işlevsel kavrama tamamen bir inşa sürecidir ve gereken mantıksal süreçten bağımsızdır.

Duval (1995) kavrama türleri arasındaki ilişkiyi açıklarken; işlevsel kavramanın diğer kavrama türlerinden özellikle söylemsel kavramadan bağımsız olarak işlemediğini, fakat genellikle şeklin sezgisel olarak yapımının söylemsel kavramadan daha az önemli olduğunu, söylemsel ve algısal kavramanın çoğu kez işlevsel kavramayı gizlediğini ve sonuç olarak bir şekle matematiksel bir yol ile bakmanın sadece bu kavrama türlerinin bir koordinasyonu (bkz. Şekil 1) ile mümkün olduğunu belirtmiştir.



Şekil 1: Matematik eğitiminde geliştirilmesi gereken beceriler ve bağlantılar (Duval, 1999)

Duval'e göre (2006) geometrik bir problemi çözmek sıklıkla farklı kavrama türlerinin etkileşimini gerektirir ve geometrik şekil olarak adlandırılan şey, yapılan matematiksel etkinlikte sadece bunlardan bir tanesi açıkça görülebilse bile, genellikle hem söylemsel hem de algısal kavramayla bağlantılıdır.

Bu çalışmada algısal kavrama olarak değerlendirilen kavram alanyazında görselleştirme (visualisation) (Arcavi, 2003; Biber, Tuna & Korkmaz, 2013; Schmitz & Eichler, 2015), uzamsal-görsel elemanların kullanımı (Gray, 1999; Tapan & Arslan, 2009), semiyotik yamaçlar dahiline kağıt-kalem yazmacına dahil elemanların kullanımı (D'Amore, 2001; Duval, 1993; Hitt, 2004) ya da çizimin yorumlama alanı ile öğrencinin yorumlama alanı arasındaki farklılıkların sonucu olarak (Laborde, 1992; Tapan-Broutin, 2014) yer bulmaktadır. Bu bağlamda araştırmada algısal kavrama olarak ele alınan bu olgunun, alan yazında farklı çalışmalar ve farklı çizim problemlerinde de başka teorik çerçeveler kapsamında rapor edildiği görülmektedir.

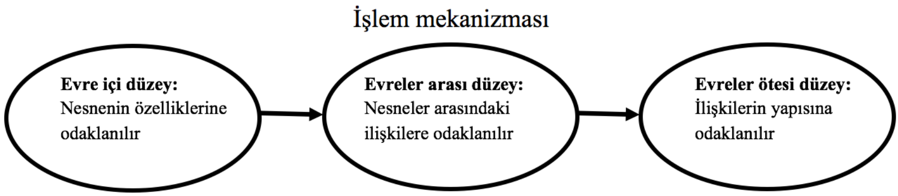
Çalışma kapsamında öğrencilerin bir matematiksel problem karşısında ortaya koydukları farklı kavrama türlerinin neler olabileceği incelenirken Duval'in bilişsel süreçlerine ek olarak öğrencilerin zihinsel yapılarını anlamada yardımcı olacağı düşüncesiyle Piaget ve Garcia'nın (1989) ortaya attığı gelişimsel mantığın basamakları olan evre-içi düzey (intra-stage), evreler arası düzey (inter-stage) ve evreler ötesi düzey (trans-stage) kavramlarından da yararlanılmıştır.

Evre içi düzeyinde, birey tekrarlanabilen işlemler ya da operasyonlara odaklanır ve şemanın (Scheme) farklı bileşenleri üzerindeki eylemler (Actions) arasında bazı ilişkileri ya da dönüşümleri tanıyabilir. Evre içi düzeyde bir öğrenen, geometrik nesneleri bir bütün olarak düşünür. Bu düzeyde öğrenen iki geometrik nesne arasındaki çoklu ilişkilere değil, sadece bir şekilde esas olan özelliğe odaklanır. Örneğin fonksiyon kavramında, evre içi düzeyindeki bir birey tek bir fonksiyona odaklanma ve onunla çeşitli aktiviteler gerçekleştirme eğilimindedir (Dubinsky & McDonald, 2001). Evre içi düzeyde öğrenenler yapılandırılmış bir uzaydaki (bu uzay iki ya da üç boyutlu olabilir) şekillerin dönüşümleri ile ilgilenmezler, bunun yerine izole edilmiş şekillerin iç özelliklerine odaklanırlar (Fernandes & Healy, 2013).

Piaget ve Garcia, öğrenenlerin işlem yaptıkları sisteme özgü referanslar kullandıkları, yani düzlemdeki ya da uzaydaki şekillerin ve sorudaki nesneler kümesinin bir bütünün özelliklerini kullandıkları düzeyi *evreler arası düzey* olarak tanımlamışlardır (Fernandes & Healy, 2013). Bu düzey ilişkilerin yapısı ve bu bilişsel varlıklar arasındaki dönüşümlerle karakterize edilir öyle ki, bu safhada birey öğeleri gruplamaya başlayabilir ve hatta onları aynı isimle adlandırabilir. Örneğin fonksiyon konusunda, evreler arası düzeyindeki bir birey fonksiyonları toplama ya da birleştirme üzerinde düşünebilir hatta bu işlevlerin hepsini fonksiyonların dönüşümü aktivitesinin aynı tür örnekleri olarak düşünmeye başlayabilir (Dubinsky & McDonald, 2001). "Evreler arası düzeydeki bir birey şekildeki herhangi bir değişikliğin şeklin parçalarının yer değiştirmesinin bir sonucu olduğunu düşünür, çünkü evreler arası karşılaştırmalar ilk ve son konumlar arasındaki karşılaştırmaları içerir" (Piaget & Garcia, 1987'den akt., Fernandes & Healy, 2013, s.41). Bu düzeyde öğrenenler şekli elemanlarına ayırabilir ve bu elemanlar üzerinde çıkarımlar yapabilirler; ayrıca şekle ait birden çok özelliği eşzamanlı olarak ve farklı şekillerin özellikleriyle kullanabilirler.

Piaget ve Garcia evreler arası düzeyi takiben *evreler ötesi düzey* olarak adlandırılan ve yapıların hakimiyeti ile karakterize edilen üçüncü düzeyin başladığını ileri sürmüşlerdir (Fernandes & Healy, 2013). Evreler ötesi düzeyde birey, evreler arası düzeyde geliştirilen ilişkilerin anlaşılmasını sağlayan örtük ya da açık temel bir yapı oluşturur; oluşturulan bu yapı şemaya bir tutarlılık verir ki bunun aracılığıyla birey neyin şema kapsamında olup neyin olmadığına karar verebilir. Örneğin fonksiyon kavramında evreler ötesi düzeyde olan bir birey fonksiyon halkaları ve fonksiyonların sonsuz boyutlu vektör uzayı gibi fonksiyonların çeşitli dönüşüm sistemlerini bu matematiksel yapıları içeren işlemlerle birlikte yapılandırabilir (Dubinsky & McDonald, 2001). Fernandes ve Healy (2013), bu düzeyin sadece bir şeklin diğerine dönüşümü ile ilgili olmadığını aynı zamanda düzlemin (ya da iki-üç boyutlu uzayın) tüm noktalarıyla işlem yapmayı; farklı uygulama ve koşullarla ilişkili değişim ve sabitlerin doğrulanmasını gerektirdiğini ifade etmektedirler (Fernandes & Healy, 2013).

Piaget ve Garcia'a göre "bu üçlü düzeyler devamlı bir süreci meydana getirirler, öyle ki bu süreçte evreler ötesi düzeyde elde edilen yapılar sırasıyla yeni bir evreler arası düzeye önderlik eden evre içi düzey analizlerine ve sonra evreler ötesi yapıların üretilmesine (bu süresiz olarak devam eder) dair bir yol sunar" (Piaget & Garcia, 1987'den akt., Fernandes & Healy, 2013, s.41). Bu sebeple Piaget ve Garcia'ya göre bu üç düzey arasındaki süreç zinciri mutlak bir hiyerarşiyi (evre içi, evreler arası, evreler ötesi) takip eder. Şekil 2 düzeyler arası geçişler ve düzeylerdeki kavramsallaştırma bazında işlem mekanizmalarını özetlemektedir.



Şekil 2. Piaget ve Garcia'nın evrelerine göre işlem mekanizmaları (González, 2015)

Bu bağlamda araştırma, geometrik bir problemler dizisi karşısında kullanılan *farklı kavrama türleri* ile *gelişimsel mantığın basamakları*nı birlikte ele alıp analiz etmesi açısından önem arz etmektedir.

Bu çalışmada yukarıda bahsi geçen teorik yapılar çerçevesinde aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranmıştır:

- Matematik öğretmen adayları, bir matematiksel problem durumu karşısında hangi kavrama türlerini, ne şekilde ortaya koymaktadırlar?
- Matematik öğretmen adayları kullandıkları kavrama türüne göre hangi mantık basamağında, ne şekilde işlem yapmaktadırlar?

2. Yöntem

Bu çalışma özü itibariyle nitel bir yapıda olup çalışmada belirli bir durumla ilgili sonuçlar ortaya koyulmaya çalışıldığı için durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışmalarının en temel özelliği belli bir durumun ayrıntılı olarak incelenmesi ve bu duruma ilişkin etkenlerin bütüncül bir yaklaşımla araştırılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

2.1. Çalışma Grubu

Bu çalışma Türkiye'nin kuzeybatısında bulunan bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 3. Sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Çalışma grubu ölçüt örnekleme ile belirlenen 36 kız ve 10 erkek toplam 46 öğretmen adayıdır. Ölçüt örnekleme, belli niteliklere sahip kişilerin araştırmaya seçildiği örnekleme türüdür (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013). Çalışma grubu seçiminde dikkat edilen ölçütler ise; öğretmen adaylarının Özel Öğretim Yöntemleri 1 ve 2, Teknoloji Destekli Matematik Öğretimi ve Geometri derslerini almış olmaları; gönüllü olmaları ve öğretmenlik mesleğini icra etmeye yakın olmalarıdır. Çalışmaya 3. sınıfların seçilmesinin diğer bir sebebi ise öğrencilerin farklı ortaöğretim kurumlarından edinmiş oldukları bilgilerin aynı kurumdan aldıkları 3 yıllık eğitim sonrası matematik öğretmenliği ortak paydasında kısmen eşitlendiği bir dönemde bulunmaları ve KPSS gibi bir sınav kaygılarının yoğun olmamasıdır.

2.2. Veri Toplama Araçları

Çalışmada veriler dağıtılan çalışma yaprakları ile öğrencilerin alışkın olduğu sınıf ortamında, programlarında yer alan bir derste, cevaplama süresinde bir kısıtlama ve sınav puanı kaygısı olmaksızın toplanmıştır. Öğrenciler çalışma esnasında ikişerli gruplara ayrılmıştır. Bunun sebebi tartışma ortamı oluşturarak her bir öğrencinin öne sürdüğü tezini mantıklı argümanlara dayandırmasını sağlamaktır. Çalışma yapraklarında yer alan sorular Balacheff'in (1988, 1991) ve Grenier'in (2010) çalışmasında kullandığı kesik üçgen (the truncated triangle) sorularıdır. Bu sorularla ilgili ayrıntılı bilgi uygulama kısmında verilmiştir.

2.3. Verilerin Analizi

Bu çalışmada veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Betimsel analiz araştırmanın kavramsal yapısının önceden belirlendiği çalışmalarda kullanılır ve bu yaklaşımda gözlenen/görüşülen bireylerin görüşleri yansıtılırken doğrudan alıntılara sık sık yer verilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu çalışmada da belirlenen problemin kullanılan kavramsal çerçeveye uygun olarak incelenebilmesi için betimsel doküman analizi yapılmış olup toplanan veriler sıklıkla şekillerle okuyucuya aktarılmaya çalışılmıştır.

2.3. Çalışmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda güvenirlik araştırmacının tarafsız olmasına ve kullandığı teorik yapıya bağlı kalarak açıklama yapmasına bağlıdır (Büyüköztürk ve ark., 2013). Bu çalışmada da veriler analiz edilirken seçilen kavramsal çerçeveye bağlı kalarak ve öğrencilerin çalışmaları birebir resmedilerek çalışmanın güvenirliği artırılmaya çalışılmıştır. Ayrıca çalışmada kullanılan sorular uygulanmadan önce alanında uzman bir akademisyenin görüşüne başvurulmuştur. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarına uygulama ile ilgili bilgi verilmesi, akademik başarılarına etki etmeyeceğinin söylenmesi ve isimlerinin gizli tutulacağının ifade edilmesi öğrencilerin kaygı düzeyinin düşürülmesini sağlayarak çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini artırmıştır.

2.4. Uygulama

Çalışma yapraklarında yer alan soruların ilki Balacheff'in (1988, 1991) çalışmasında kullandığı, 2 ve 3. sorular ise Grenier'in (2010) çalışmasında önerdiği sorulardır. Bu sorular sırasıyla bir, iki ve üç köşesi kesik olan üçgenlerin çevrelerinin hesaplanması probleminden oluşmaktadır (Şekil 3) ve öğrencilere her biri ayrı bir kâğıtta olacak şekilde dağıtılmıştır.

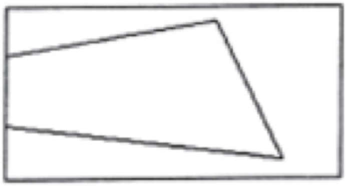
Çalışma için bir geometri probleminin seçilme sebebi kavrama türlerinin geometrik temele dayanan bir yapısının olmasıdır. Bu çalışmanın diğer çalışmalardan farkı literatürdeki bu üç sorunun aynı anda ve kolaydan zora doğru ilerleyen bir yapıda verilmesidir. Bu şekilde bir düzen seçilmesinin nedeni öğrencileri daha kolay bir durumdan zor bir duruma doğru ilerletmek ayrıca birinci üçgen için buldukları yöntemin diğer üçgenler için işlemeyebileceğini fark etmelerini sağlamaktır. Özellikle üç köşesi kesik olan üçgen öğretmen adaylarını farklı stratejiler geliştirmeye zorlamaktadır. Bu durum öğretmen adaylarını önceki stratejilerini dolayısıyla kavrama türlerini kullanamadıkları bir ortama sürüklemiştir. Ayrıca geometri sorusu olarak kesik üçgen sorularının seçilme sebebi, soruların bir bağlam içerisinde verildiğinde gerçek bir problem durumu ortaya koymalarıdır. Örneğin bu üç soru için "Bir öğrenci kendisine verilen kesik üçgenin çevresini hesaplamak istemektedir. Ancak üçgeni tamamlamaya çalışırken kâğıdın yetmediğini fark etmiştir. Siz aynı durumda nasıl bir çözüm yöntemi bulurdunuz?" şeklindedir. Uygulama öncesinde Şekil 3 ve 4'de verilen çalışma yapraklarının her biri için bu bağlam kullanılmıştır.

KESİK ÜÇGEN (THE TRUNCATED TRİANGLE)

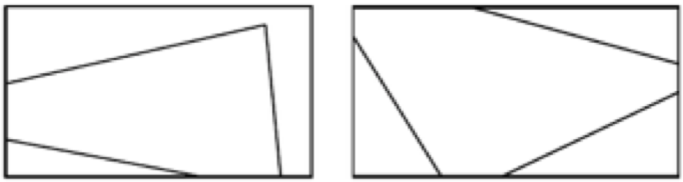
Ad Soyad: **Sınıf:** **Bölüm:** **Tarih:**

Yönerge: Soruları kağıdı katlamadan ve soru kâğıdının altına herhangi bir kağıt koymadan cevaplayınız.

Size verilen kağıtlarda sırasıyla bir, iki ve üç köşesi kesilmiş üçgenler bulunmaktadır. Sizden istenilen bu kesik üçgenlerin çevrelerini hesaplamak için matematiksel bir yöntem bulmanız ve bulduğunuz yöntemin neden bu kesik üçgenlerin çevrelerini bulmanızı sağladığını açıklamanızdır.



Şekil 3: Birinci soru (Balacheff'in (1988, 1991) çalışmasından alınan kesik üçgen sorusu)



Şekil 4: İkinci ve üçüncü sorular (Grenier'in (2010) çalışmasından alınan kesik üçgen soruları)

3. Bulgular

Çalışmada elde edilen bulgular incelendiğinde bazı öğrencilerin tüm soruları, bazılarının ise bir ya da iki soruyu doğru çözdükleri görülmüştür. Bu sebeple bulgular her bir soruya verilen doğru ve yanlış cevaplar ile boş bırakılan sorular olmak üzere genel olarak üç kategoride incelenmiştir. Her bir kategoride kaç öğrencinin bulunduğu aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Tablo 1: Öğrencilerin cevapları

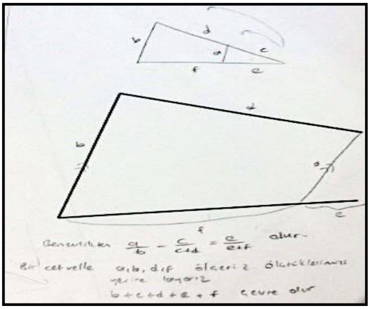
	1.Soru	**2.Soru**	**3.Soru**
Doğru	19	9	4
Yanlış	23	25	13
Boş	4	12	29

İlerleyen paragraflarda her bir soru için elde edilen bulgular ayrı ayrı verilecektir.

3.1. Birinci Soruya Verilen Cevaplara Ait Bulgular

Öğrencilerden birinci soruya doğru cevap verenlerin çözümleri incelendiğinde bu öğrencilerin şekli tamamlamaya gerek duymadan verilen şeklin elemanlarını/parçalarını kullanarak muhakeme yürütebildikleri, üçgenin farklı özelliklerini kullanabildikleri, üçgene ait özellikleri farklı matematik özelliklerle bağdaştırarak işlem yapabildikleri dolayısıyla evreler arası ve/veya evreler ötesi düzeylerinde bulundukları görülmüştür.

Birinci sorunun doğası–sorunun çözümünün evreler ötesi bir muhakeme gerektirmemesi– gereği, bu soruya doğru cevap veren öğrenciler için evreler arası düzeyde oldukları tespit edilebilmiş ancak bu öğrencilerin evreler ötesi düzeyde olup olmadıklarına dair bir değerlendirme yapılamamıştır; bu değerlendirme ancak yanlış çözümlerde mümkün olmuştur. Yapılan doğru çözümlerin genelinde öğrenciler paralellik ve benzerliği kullanmış (19 öğrenci) ve verilen çizimdeki kenarlardan herhangi birisine üçgenin içinden çizdikleri paralel yardımıyla Thales teoremini uygulamışlardır. Bu öğrencilerin verilen üçgeni, üçgenle ilgili bir teorem ya da özellikten faydalanarak çözmeye çalışmaları onların söylemsel kavrama türünü öncelikli olarak kullandıklarını göstermektedir. Örneğin Şekil 5'te bir öğrencinin çözümü verilmiştir[4]. Bu çözüm incelendiğinde öğrencinin, verilen şeklin bir köşesi eksik olan bir üçgen olduğunun belirtilmesi üzerine, üçgen ile ilgili bir teorem (Thales teoremi) kullanmaya çalıştığı görülmektedir.

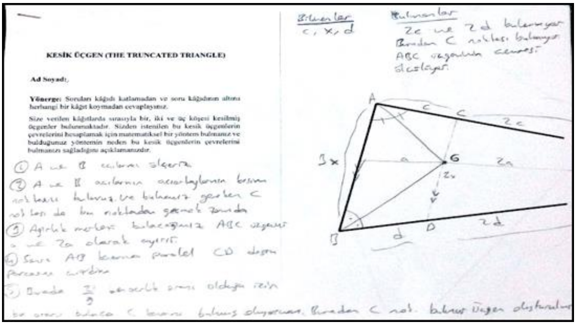


Şekil 5. Ö41'ın çözümü

Birinci soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerden üçü üçgenin verilen iki köşesinden faydalanarak üçgenin ağırlık merkezini belirlemeye çalışmış ve bu orana göre benzerlik uygulamak istemişlerdir. Bu öğrencilerin çözüm stratejileri incelendiğinde şekli tamamlama ihtiyacı duymadan problemi çözmeye çalışmaları ve eldeki bilgiyi kullanarak bildikleri bir özellik ve teoremden istifade etmeye çalışmış olmaları onların söylemsel kavrama türünü kullandıklarını ortaya koymaktadır. Şekil 6 problemi çözerken üçgenin ağırlık merkezini kullanmak isteyen bir öğrencinin çözümünü göstermektedir. Bu çözümde öğrenci, verilenleri kullanarak açıortayların kesişim noktasını bulmuş ancak iç teğet çemberin merkezi olan bu noktayı ağırlık merkezi gibi kullanarak matematiksel işlemler yapmıştır. Böylece bu çözümde her ne kadar söylemsel kavrama ağırlıklı olarak görülse de işlevsel kavramanın parça-bütün ilişkisinin de kullanımının söz konusu olduğu söylenebilir. Diğer yandan bu çözüm yolunu kullanan öğrencilerin şekli tamamlamadan işlem yapmış olmaları ve bu işlemlerinde üçgene ait tek bir özellik ya da teorem değil birden fazla özelliği bir arada kullanmaya çalışmış olmalarından dolayı esasen evreler

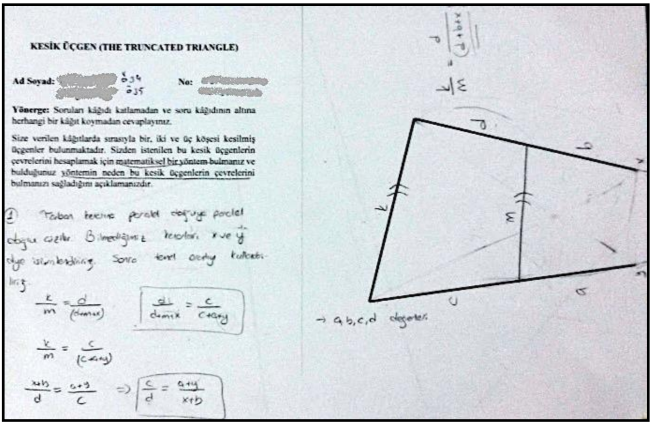
[4] Yazımda kolaylık olması açısından her öğrenci kendisine verilen numara ile belirtilmiştir. Örneğin 1. Öğrenci için Ö1 kullanılmıştır.

arası düzeyde oldukları düşünülmüştür. Ayrıca tamamlanmamış şekil üzerinde ağırlık merkezinin konumunun hatalı olduğunu görememeleri onların üçgen nesnesini geometrik bir yapı olarak incelemediğini, bu yapıyı oluşturan farklı noktalar üzerinde yeterince muhakeme edemediklerini; böylece evreler ötesi düzeyde işlem yapmadıklarını göstermektedir.



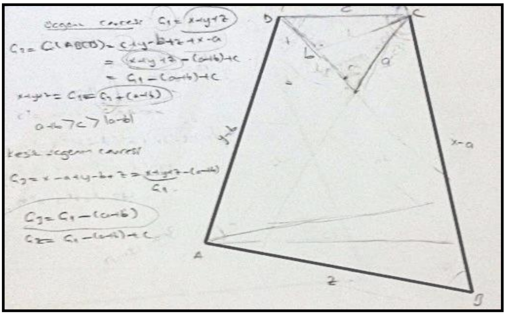
Şekil 6. Ö43'ün çözümü

Birinci soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerin çözümleri incelendiğinde bu öğrencilerin 4'ünün üçgene bağlı tek bir özelliği kullanarak işlem yapmış olmaları ve kullandıkları bu özelliğin sonuca ulaşmada yeterli olmadığını görememiş olmaları sebebiyle esasen evre içi düzeyde bulunduğu; 19 öğrencinin ise verilen şeklin parçalarından hareketle, farklı alt-şekiller oluşturdukları ve şekle ait farklı geometrik özellikleri kullanmaya çalıştıkları için esasen evreler arası düzeyde oldukları düşünülmüştür. Bu öğrencilerin, sorunun çözümünde ortaya koydukları yanlışları, soruyu matematiksel bir yapı ve bütünlük dahilinde yorumlayamamış olmaları, onların evreler ötesi düzeyde olmadıklarını düşündürmüştür. Evreler arası düzeyde bulunan öğrencilerden ikisinin çözümü incelendiğinde (Şekil 7) bu öğrencilerin soruyu paralellik yardımıyla çözmeye çalıştıkları ancak benzerlik oranında hata yaptıkları görülmektedir. Öğrencilerin bu hatası kullanmayı düşündükleri teorem ile ilgili yanlış bilgilerinden kaynaklanmakta olup burada bir teorem kullanarak matematiksel özellikler ile muhakeme etmiş olduklarından dolayı problemi çözerken söylemsel kavrama türünü kullanmış oldukları görülmektedir.



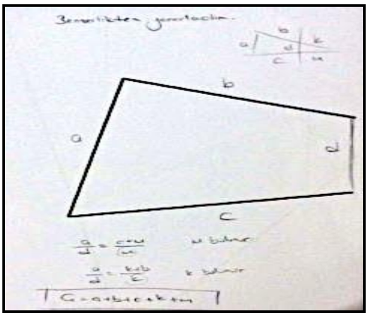
Şekil 7. Ö34 ve Ö35'in çözümü

Evreler arası düzeyde değerlendirilip birinci soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerden ikisi kâğıdın kenarına göre kesik köşenin simetriğini almış ve işlemlerini bu mantık üzerine yapılandırmaya çalışmıştır (Şekil 8). Öğrencilerin üçgene bağlı farklı geometrik özellikleri birlikte kullanmış olmaları onların evreler arası düzeyde işlem yaptıklarının bir göstergesi olarak yorumlanmıştır. Ancak, problemin çözümünde ortaya koydukları simetri kavramına yönelik üçgenin köşe noktasının simetriğini rasgele almış olmaları ve bu simetri alma işleminde üçgeni ve üçgenin içinde bulunduğu düzlemi bir noktalar kümesi olarak ortaya koymadıklarından dolayı onların evreler ötesi düzeyde olmadıkları kanaatine varılmıştır. Ayrıca öğrencilerin, üçgenin kenarlarının bir bölümünü belirtmek amacıyla verilmiş olan ve matematiksel veri olarak hiçbir değeri bulunmayan doğru parçalarının uç noktalarını kullandıkları dikkat çekmektedir. Böylece bu öğrencilerin algısal kavramayı kullandıkları kanaatine varılmıştır. Ayrıca bu öğrencilerin bu uç noktaları birleştirerek oluşturdukları bir simetri eksenine göre şeklin görünmeyen kısmını çizmeye çalışmış olmaları, onların işlevsel kavramanın konumsal dönüşümünü kullanarak da işlem yaptıkları şeklinde yorumlanmıştır ki bu çözüm yolunda işlevsel kavramanın sezgisel işlevi tespit edilebilmiştir. Bu sezgisel işleve eşlik eden söylemsel kavrama öğrencilerin kullandıkları cebirsel ifadeler, geometrik özellikler (üçgen eşitsizliği) ve formüller (çevre formülü) ile kendini göstermektedir. Böylece, problemin bu öğrenciler tarafından çözümünde üç farklı kavrama türünün de kullanıldığı görülmektedir.



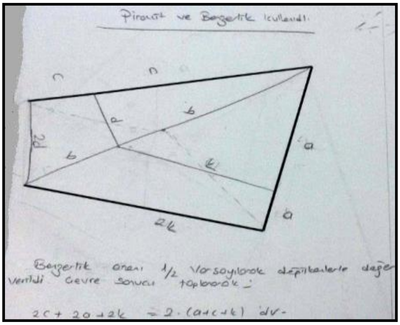
Şekil 8. Ö16 ve Ö17'nin çözümü

Birinci soruya yanlış cevap veren iki öğrenci ise soruda kesin olarak paralellik belirtilmediği halde sayfanın kenarını üçgenin bir kenarına paralel kabul edip işlem yapmaya çalışmışlardır (Şekil 9). Bu öğrencilerin cevapları incelendiğinde, thales teoremi ve benzerlik gibi teoremlere dayalı bir çözüm yolu üretmeye çalışmaları sebebiyle probleme söylemsel kavrama ile yaklaştıkları düşünülebilir. Ancak, yönergede paralellikle ilgili bir durum belirtilmediği halde işlemlerini kendilerince paralel olduğunu düşündükleri kenarlara göre yaptıklarından ve bu kenarın görsel olarak inşa edilip geometrik temelleri bulunmadığından, öğrencilerin problemin çözümünü aynı zamanda algısal kavramayı da işe koşarak gerçekleştirmeye çalıştıkları görülmektedir. Aslında, problemin çözümündeki hatanın algısal kavramanın kullanımından kaynaklandığı söylenebilir. Bu öğrenciler, üçgende benzerlik kuralını kullanırken bu kuralın kullanımı için gerekli olan paralellik özelliğini düşünmemiş olduklarından dolayı; bu problemde biri diğerini gerektiren iki farklı özelliği birlikte hatalı olarak kullanmışlar ve böylece evre içi düzeyde değerlendirilmişlerdir.



Şekil 9. Ö6'nın çözümü

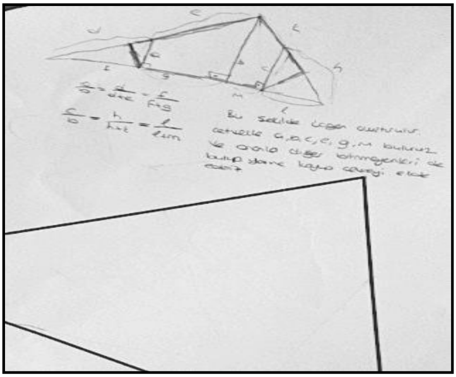
Birinci soruyu yanlış cevaplayıp evre içi düzeyde bulunan öğrencilerin soruya farklı yaklaşımlarda bulundukları görülmüştür. Örneğin üç öğrenci verilen şekilden bir piramit üreterek ardından da benzerlik kullanarak çözümü bulmaya çalışmışlardır (Şekil 10). Bu öğrenciler verilen düzlemsel şekli üç boyuta taşımayı düşünmüş ancak bunu yaparken benzerlik kuralı adı altında bazı oranları hesaplamaktan öteye gidememişlerdir. Başka bir deyişle, öğrenciler, düzlemde de geçerli olan benzerlik kurallarını üç boyutta kullanmakla yetinmiş ve tek bir özelliği farklı bir şekil üzerinde kullandıklarından esasen evre içi düzeyde olarak değerlendirilmişlerdir. Öğrencilerin verilen kesik üçgeni kendilerince piramide tamamlamaları yani verilen şekli farklı bir boyutta yeniden düşünebilmeleri onların işlevsel kavrama ile işlem yaptıklarını göstermektedir. Diğer yandan, bu öğrencilerin de verilen üçgen üzerinde işlem yaparken üçgenin kenarlarının bir parçasını belirten ve matematiksel veri olarak hiçbir değeri bulunmayan doğru parçalarının uç noktalarını kullanarak çizim yapmış olmaları, onların algısal kavramayı da işe koştuklarının bir göstergesi olarak düşünülmüştür. Burada dikkat çeken bir husus da öğrencilerin verilen kesik üçgenin tamamlanması durumunda çevresinin ne olduğunu bulmaları gerekirken, verilen kesik üçgenin kesilen kısmını birleştirerek bir dörtgen olması durumunda çevresinin nasıl bulunabileceğini anlatmaya çalışmalarıdır. Bu ise muhtemelen soruyu yanlış anlamış olmalarından kaynaklanmaktadır.



Şekil 10. Ö31, Ö32 ve Ö33'ün çözümü

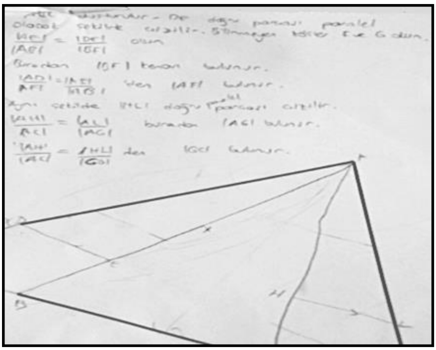
3.2. İkinci Soruya Verilen Cevaplara Ait Bulgular

2. soruya doğru cevap veren öğrencilerden ikisi evreler ötesi, yedisi ise evreler arası düzeyde değerlendirilmiştir. Evreler ötesi düzeyde değerlendirilen öğrenciler çözüme ulaşabilmek için verilen üçgenin tamamlanmış halini bir taslak olarak çizerek işlemlerini bu üçgen üzerinden yürütmüşlerdir (Şekil 11). Çözüm stratejilerinde öğrenciler, çizdikleri şekli alt şekillere bölmüşler, başka bir deyişle üçgenin içinde farklı dik üçgenler oluşturmuşlar ve oluşturdukları bu dik üçgenler arasında benzerlik kurmuşlardır. Bu çözüm stratejisi onların evreler arası düzeyde oldukları yönünde değerlendirilebilecekken; bu iki öğrencinin verilen şekilden bağımsız olarak problemi kendi çizdikleri genel bir şekle uyarlamış olmaları ve bu uyarladıkları yapı dahilindeki özelliklerle işlemler yapmış olmaları onların evreler ötesi düzeye de geçiş yapmış olabilecekleri yönünde bulgular vermektedir. Ayrıca öğrencilerin üçgeni oluşturan noktalar kümesine ait elemanların seçiminde verilen çizimin elemanlarından bağımsız noktalar seçmiş olmaları onların evreler ötesi düzeyde işlem yaptıkları bulgusunu destekler niteliktedir. Buna ek olarak, bu öğrenciler tamamını resmettikleri üçgende verilen uzunluklar arasında bir benzerlik ilişkisi kurarak, geometrik muhakeme ile çözüme ulaşmaya çalıştıkları için söylemsel kavrama türünü kullanmışlardır.



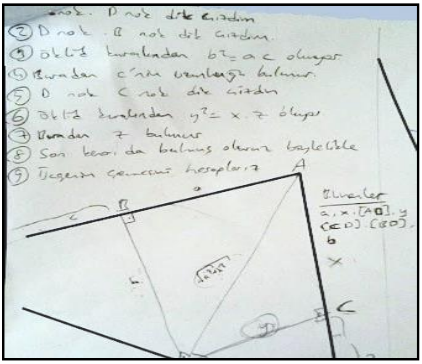
Şekil 11. Ö25 ve Ö26'nın çözümü

İkinci soruyu doğru çözen diğer 7 öğrenci ise şekle dair verilen parçaları kullanarak çözüm üretmeye çalışmış ve bu çözümlerinde bir yandan verilen şekli alt-şekillere bölmüş diğer yandan da farklı geometrik özellikleri birlikte kullanmış olduklarından dolayı evreler arası düzeyde değerlendirilmişlerdir. Bu öğrenciler çözümü iki farklı bakış açışı ile yürütmüşlerdir. Bunlardan ilk grup (2 öğrenci) kesik üçgenin verilen parçaları yardımıyla üçgenin içerisine yeni bir üçgen çizmiş ve bu yeni üçgen ile kesik üçgen arasında bir benzerlik oranı belirlemeye çalışmışlardır (Şekil 12). Burada öğrenciler verilen şeklin ilk görüntüsü üzerinde yardımcı bir üçgen çizmek sureti ile değişiklikler yaptıklarından işlevsel kavrama türünü kullanmışlardır. Diğer yandan, şekil üzerinde yaptıkları değişikliklerle çözüme ulaşma arayışlarında verilenleri dikkate alarak, matematiksel özellik ve teoremlerden faydalanmış olmaları onların probleme söylemsel kavrama ile de yaklaştıklarını göstermektedir.



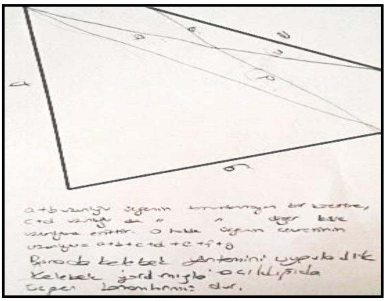
Şekil 12. Ö23 ve Ö24'ün çözümü

Evreler arası düzeyde bulunan diğer grup (5 öğrenci) ise verilen kesik üçgenin kenarları üzerinde oluşturdukları yükseklilere Öklid bağıntısını uygulamış ve çözüme bu şekilde ulaşmaya çalışmışlardır (Şekil 13). Bu gruptaki öğrenciler verilen şeklin üçgen olduğu bilgisini kullanarak bildikleri bir özelliği soru çözümünde kullandıkları için yani şekil ile matematiksel prensipler arasında bir ilişki kurdukları için, problemi söylemsel kavrama türünü kullanarak ele almışlardır.



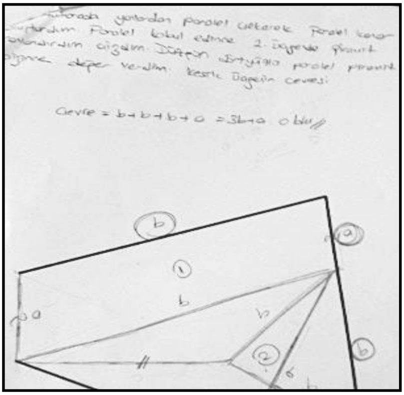
Şekil 13. Ö42’nin çözümü

İkinci soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerin çözümleri incelendiğinde bu öğrencilerin genelinin çözüm arayışlarının bir yerinde algısal kavramayı da kullandıkları için hataya düştükleri görülmüştür. Çünkü öğrenciler verilen iki köşesi eksik üçgenin kesik kenarlarının üçgenin içine doğru çizilmesi durumunda her iki köşenin (üçgenin içerisinde) çakışık olacağını düşünmektedirler (Şekil 14). Öğrenciler üçgenin içerisine bir tür kelebek çizmeye çalışmış ve bu kelebeğin açılması durumunda üçgenin tamamlanacağını varsaymışlardır. Öğrencilerin bu varsayımlarını, işlevsel kavramanın konumsal dönüşümünü ve algısal kavramayı birlikte kullanarak gerçekleştirdikleri kanaatine varılmıştır. Aslında, öğrencilerin herhangi bir geometrik bilgi verilmeksizin sadece kendilerinin varsaydığı ancak veri olarak verilmemiş ya da çıkarımsal olarak elde edilemeyecek bir özellik ile üçgeni tamamlamaya çalışmaları onların çözümde algısal kavrama türünü kullandıklarını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin çözüme ulaşmak için, üçgenin kenarlarını üçgenin içinde tamamlama stratejilerinde çıkarımsal olarak tutarlı başka hiçbir geomektik özellik kullanmamış olmaları, onların sadece üçgenin kenarlarını bir şekilde tamamlamaya odaklanmış oldukları ve böylece de evre içi düzeyde işlem yaptıkları yönünde yorumlanmıştır.



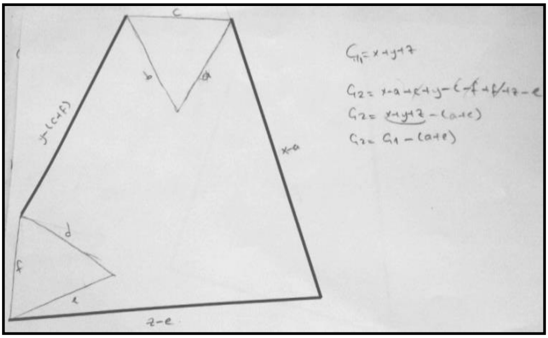
Şekil 14. Ö1, Ö2 ve Ö3’ün çözümü

İkinci soruda yanlış çözüme giden ve evre içi düzeyde değerlendirilen üç öğrenci sorudaki kesik üçgenin sadece verilen kenarlarının hesaplanmasının istendiğini düşündükleri için bu kenarların uzunluklarını hesaplayabilecekleri bir yöntem bulmaya çalışmışlardır. Bu öğrenciler verilen çizimde kâğıdın kenarının verilen kenarlardan birine paralel olacağı düşüncesiyle hareket edip verilen çizimin içerisinde bir düzgün dört yüzlü oluşturmaya çalışmışlardır (Şekil 15). Burada öğrencilerin verilen şekli farklı bir boyutta yeniden düşünebildikleri için işlevsel kavrama türünü kullandıkları düşünülebilir. Ancak öğrenciler istenilen şeklin tamamını farklı bir boyutta düşünmek yerine verilen kenarlar yardımıyla şeklin içine bir düzgün dört yüzlü yerleştirmeye çalışmışlardır. Bu ise onların işlevsel kavrama türünü kullandıklarını söylemek için yeterli değildir. Bu açıdan, bu öğrenciler daha çözümü yapmaya başlarken kâğıdın kenarını üçgenin kenarına paralel olarak algıladıkları ve böyle kabul ederek çözüme devam ettikleri için daha çok algısal kavrama türünü kullandıkları söylenebilir.



Şekil 15. Ö31, Ö32 ve Ö33'ün çözümü

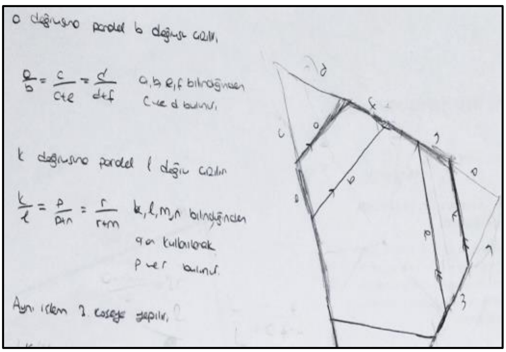
Çalışmaya katılan iki öğrencinin 1.soruda uyguladıkları yöntemi diğer sorularda da kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu öğrenciler, üçgene bağlı farklı geometrik özellikleri birlikte kullanmış olmaları sebebiyle birinci soru ile aynı düzeyde yani evreler arası düzeyde değerlendirilmişlerdir. Öğrenciler, her ne kadar matematiksel bir teori dahilinde işlem yapmaya çalışmış olsalar da kâğıdın kenarına göre kesik köşelerin simetriğini almaya çalışmış ve bu kesik kısımların üçgenin iç kısmında olacağını düşünmüşlerdir (Şekil 16). Böylece bu öğrencilerin, çözümlerinde, söylemsel kavramayı kullandıkları, algısal kavrama ile işlem yaptıkları ve aynı zamanda da işlevsel kavramanın konumsal dönüşümünü kullandıkları gözlemlenmiştir.



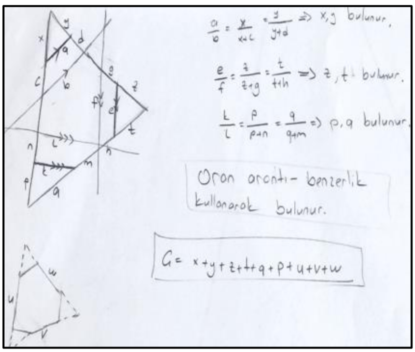
Şekil 16. Ö16 ve Ö17'nin çözümü

3.3. Üçüncü Soruya Verilen Cevaplara Ait Bulgular

Üçüncü soru için doğru çözüm yolu geliştiren öğrenciler ilk soruyu doğru çözen ve yanlış çözen olmak üzere ikiye ayrılmıştır. İlk ve son soruyu doğru çözen öğrenciler (2 öğrenci) ilk soruda kullandıkları stratejilerini üçüncü soruda da başarılı bir şekilde kullanmışlardır. Bu öğrencilerin verilen şekilden bağımsız olarak problemi kendi çizdikleri genel bir şekle uyarlamış ve bu uyarladıkları yapı dahilindeki özelliklerle işlemler yapmış olmaları; ayrıca verilen çizimin elemanlarından bağımsız noktalar seçmiş olmaları (Şekil 17) onların evreler ötesi düzeyde ve söylemsel kavramaya sahip oldukları yönünde değerlendirilmiştir. Üçüncü soruyu doğru çözen diğer iki öğrenci ise ilk soruda algısal kavramayı da kullanmış olmalarına rağmen (örn., Şekil 9, Ö6) üçüncü soruda stratejilerini değiştirmiş, verilen şekilden bağımsız olarak problemi kendi çizdikleri genel bir şekle uyarlamış, ardından Thales teoremini kullanmış ve doğru çözüme ulaşabilmişlerdir (Şekil 18). Üçüncü soru için yaptıkları çözüm incelendiğinde bu öğrencilerin, bu problemin çözümünde söylemsel kavramaya sahip oldukları görülmektedir.

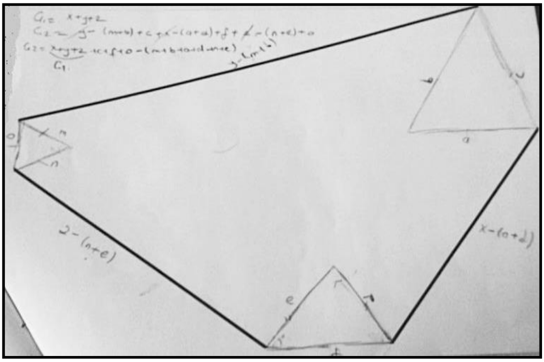


Şekil 17. Ö25 ve Ö26'nın çözümü



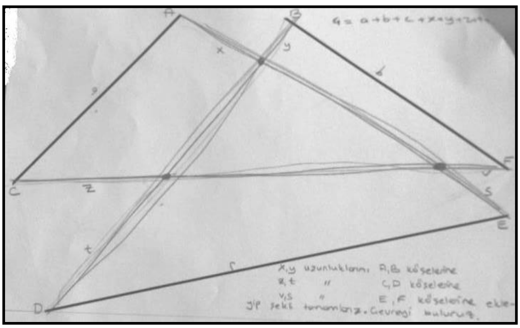
Şekil 18. Ö6 ve Ö7'nin çözümü

Üçüncü sorudaki yanlış çözümlerde ise iki öğrencinin birinci sorudaki stratejilerini üçüncü soru için de kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu öğrenciler diğer sorularda yaptıkları gibi bu soruda da kâğıdın kenarına göre kesik köşelerin simetriğini almaya çalışmış, bir nevi kesik kenarları üçgenin üzerine katlamış ve bu kesik kısımların tamamının üçgenin iç kısmında olacağını düşünmüşlerdir (Şekil 19). Böylece bu öğrencilerin, yine evreler arası düzeyde bulundukları hem algısal hem de söylemsel kavrama ile işlem yaptıkları ve aynı zamanda da işlevsel kavramanın konumsal dönüşümünü kullanmaya devam ettikleri gözlemlenmiştir.



Şekil 19. Ö16 ve Ö17'nin çözümü

Üçüncü soruyu yanlış çözen beş öğrenci çözümlerinde ikinci soruda yürüttükleri mantığı kullanmaya çalışmışlardır. Öğrenciler üç kenarı kesik olarak verilen üçgenin kenarlarını birleştirerek kesik olan köşelerin üçgenin içerisinde oluşacağını düşünmüşler (Şekil 20) ve yine evre içi düzeyde değerlendirilmişlerdir. Burada öğrenciler oluşturdukları kenarların verilen kenarlarla doğrusal olacağı gibi bir algıya sahiptirler. Bu sebeple de üçgenin içerisinde oluşturmuş oldukları bu kenar ve köşelerin açıldığı takdirde üçgeni tamamlayacağını varsaymışlardır. Öğrencilerin bu düşünce yapısında olmaları ise onların bu soruda da algısal kavrama türünü kullandıklarının ve işlevsel kavramanın konumsal dönüşümü ile işlem yaptıklarının göstergesidir.



Şekil 20: Ö4 ve Ö5'in çözümü

3.4. Birinci, İkinci ve Üçüncü Sorulara Verilen Cevaplara Ait Bulguların Sentezi

Çalışmada kullanılan her üç soruya verilen cevaplara ait bulgular göstermektedir ki her öğrenci verilen matematiksel bir durumu anlamada farklı kavrama türlerini kullanmaktadır. Birinci soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin esasen söylemsel kavrama türüne sahip olduğu buna karşın yanlış cevaplayan öğrencilerin farklı kavrama türlerine sahip olabileceği gözlenmiştir. İkinci soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin söylemsel ve işlevsel, yanlış cevaplayanların ise sorunun çözümünde diğer kavrama türlerinin yanında algısal kavrama türüne de yer verdikleri gözlenmiştir. Üçüncü soruda ise doğru cevaplayan öğrencilerin söylemsel kavrama, yanlış cevaplayanların ise algısal kavrama türünü de kullandıkları görülmektedir.

Bunun yanı sıra benzer bir problem durumu karşısında öğrenciler, bir durum için belli bir kavrama türünü ya da türlerini kullanırken, benzer diğer bir durumda problemi irdeleme için kullandıkları kavrama türünü değiştirebilmekte veya bu kavrama türlerinden bir ya da birkaçından vazgeçebilmektedirler. Örneğin Ö6 ve Ö7 birinci soruda kâğıdın kenarının üçgenin bir kenarına paralel olduğunu düşünerek işlemlerini yaparken algısal kavramayla hareket etmişler ancak üçüncü soruda bu stratejilerini düzelterek üçgenin tamamını resmedip paralellik kurallarını tekrardan göz önünde bulundurabilmişlerdir. Bu ise onların artık algısal değil söylemsel kavramayla hareket ettiklerini göstermektedir. Benzer bir durum Ö23 ve Ö24 için de gerçekleşmiştir. Bu öğrenciler birinci soruyu çözerken Thales teoreminden yararlanarak sadece söylemsel kavrama türünün bir örneğini vermiş olmalarına karşın ikinci soruda söylemsel kavrama ile birlikte işlevsel kavrama türüne uygun bir çözüm yapmışlardır (Şekil 12).

Bahsi geçen öğrencilerin aksine ilk soruda işlevsel kavramaya birlikte algısal kavramayı da kullanan üç öğrencinin (Şekil 10; Ö31, Ö32, Ö33) ikinci soruda da algısal kavrama türüne uygun hareket ettikleri gözlenmiştir (Şekil 15; Ö31, Ö32, Ö33). Bir öğrencinin ise ilk sorunun çözümünde belli teoremlerden yararlandığı için söylemsel kavrama türüne sahip olduğu ancak ikinci soruda kesik olan iki köşenin üçgenin içerisinde birleşeceği algısına kapılarak söylemsel kavrama ile birlikte algısal kavrama türünde de hareket ettiği gözlenmiştir. Ayrıca 1. ve 2. soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin evreler arası ve evreler ötesi düzeyde bulundukları ancak 3. soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin sadece evreler ötesi düzeyde bulunduğu gözlenmiştir.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada öğrencilerin bir matematiksel problem durumu karşısında ortaya koydukları kavrama türleri incelenmiştir. Bu amaçla İlköğretim Matematik Öğretmenliği 3. sınıf öğrencilerine kesik üçgen (the truncated triangle) problemleri yöneltilmiş ve öğrencilerin problemlere yaklaşımlarındaki ve çözüm yöntemlerini belirlemedeki kavrama türleri açığa çıkarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının matematiksel problem durumunun çözümünde evre içi, evreler arası ve evreler ötesi düzeylerine göre değerlendirilmesi yapılmış ve öğretmen adaylarının şeklin özellikleri, şeklin özellikleri arasındaki ilişkiler ve ilişkilerin oluşturdukları yapı ile ilgili işlem yapıp yapmadıkları araştırılmıştır.

Çalışmada elde edilen bulgular ışığında öğretmen adaylarının bir matematiksel durum karşısında sergiledikleri kavrama türlerinin oldukça farklı olduğu söylenebilir. Öncelikle bir köşesi tamamlanmamış üçgen sorusunda öğrencilerin çoğunun evreler arası ve/veya evreler ötesi düzeyde işlem yapmaya çalıştığı gözlenmiştir. Birinci sorunun doğası– sorunun çözümünün evreler ötesi bir muhakeme gerektirmemesi– gereği öğrencilerin evreler ötesi düzeyde olup olmadıklarına dair kesin bir değerlendirme yapılamamıştır. Bu öğrencilerin çözüm yaklaşımları incelendiğinde ise sorudaki şeklin üçgen olduğunun ifade edilmesini yeterli bularak zihinlerinde üçgen ile ilgili tanım, teorem veya kuralları gözden geçirip uygun olduğunu düşündüklerini probleme uygulamaya çalışmaları onların bu soruyu çözerken söylemsel kavrama türünü kullandıklarını göstermiştir.

Birinci soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerde ise Duval’in belirttiği üç kavrama türünün (algısal, işlevsel, söylemsel) hepsinin örnekleri ile karşılaşılmıştır. Bu durum, bir problemin çözümünde esasen söylemsel kavrama türünü kullanan öğrencilerin genelde doğru çözüme ulaşabildikleri ancak diğer kavrama türlerini kullanan öğrencilerin daha çok yanlış sonuca ulaşabilecekleri yönünde yorumlanmıştır. Bu yorumun temeli, çalışmada soruları doğru çözen öğrencilerin genelinin söylemsel kavramayı kullanmış olmalarıdır. Ancak Deliyianni ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada geometrik şekli anlamaya en çok katkı sağlayan kavrama türünün işlevsel kavrama olduğunu ifade etmişlerdir. Böylece, sorunun çözümünde bazı kavrama türlerinin öğretmen adaylarının özelinde gizli/içsel bir zihinsel süreç olarak yaşandığı düşünülebilir. Bu sebeple durumun netleştirilebilmesi adına bu konu üzerinde daha fazla çalışma yapılması gerekmektedir. Ayrıca ilk soruyu yanlış çözen öğrencilerin evre içi ve evreler arası düzeylerinde işlem yaptıkları tespit edilmiştir.

Balacheff (1988) araştırmasında, bu makalenin birinci sorusunu orta okul öğrencilerine uygulamış ve en çok rastlanan öğrenci hatası olarak kâğıdın kenarını çözümde kullanma olarak raporlandırmıştır. Bu çalışmada da her ne kadar matematik öğretmen adayları ile çalışılmış olsa da bu seviyedeki öğrencilerin dahi algısal kavramadan etkilendikleri ve çözümlerinde üçgenin kesilmiş kenarlarının uç noktalarını bir çözüm elemanı olarak kullandıkları benzer şekilde görülmüştür.

Balacheff (1988) bu soru için temel öğrenci güçlüğünün verilen eksik üçgen için, tamamlanmış, izometrik bir model üçgen çiziminden (zihinsel ya da fiziki olarak) kaynaklandığını belirtmektedir. Böylece öğrenciler cetvel yardımıyla ölçümler yaparak üçgenin çevresini hesaplamaya çalışmaktadırlar. Bu çalışmada da öğrencilerin tamamlanmış bir model üçgen çizmek ve bu model üzerinde muhakeme etmek yolunu seçtikleri çözümlere rastlanmıştır ki bu çözümler evreler ötesi düzeyine ait çözümler olarak değerlendirilmiştir. Ancak Balacheff’in (1988) çalışmasından farklı olarak, bu çalışmaya konu olan öğrenciler model bir eş üçgen çizme ve böylece çevreyi, kenarları cetvel yardımıyla ölçerek hesaplama yoluna gitmemişlerdir. Bunun yerine, üçgenin kenar uzunluklarını elde etmeyi ve böylece çevreyi hesaplamayı sağlayacak eşitlik, teorem veya formüller kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Böylece bu durum öğrencilerin söylemsel kavramayı kullanarak çözüme ulaşmaya çalıştıkları yönünde yorumlanmıştır.

Bu bağlamda, Balacheff'in çalışması ile yapılan çalışma arasında çıkan bu sonuç farkının, öğrencilerin seviyelerinden ve öğrenim hayatlarında geometri problemlerinin çözümü ile ilgili yapılandırdıkları bilgilerden kaynaklanmış olduğu düşünülmektedir. Öyle ki, bir ortaokul öğrencisi için çizim üzerinde ölçümler yapmak ve bu ölçümleri kullanarak bir sonuca ulaşmak karşılaşılan bir durumken (Tapan-Broutin, 2010), matematik öğretmen adayları çizimler üzerinde yapılabilecek işlemlerle ilgili eğitim almaktadırlar.

Farklı kavrama türlerinin matematik problemlerin çözümünde uygun bir şekilde kullanımı için, bu konuda bir eğitimin şart olduğu Duval (1994) tarafından belirtilmektedir. Bu çalışmaya katılan öğrencilerin söylemsel kavramanın kullanımı ile ilgili gerek teorik matematik gerekse matematik öğretimi ile ilgili derslerde eğitim almış olması bu kavrama türünün tüm öğrenciler tarafından kullanılmış olması bulgusu ile desteklenmiş olmaktadır.

Mevcut araştırmada öğrencilere yöneltilen ikinci ve üçüncü problemler Grenier'den (2010) alınmıştı. Grenier (2010) çalışmasında bu iki problemin nasıl çözüleceğinden bahsetmekte ve sadece doğru çözüm yolunu vermekle yetinmektedir. Bu çalışmada her iki problemi de doğru çözen öğrencilerin Grenier tarafından önerilen çözüm yolunu kullandıkları görülmüştür. Dolayısıyla çalışmada Grenier'in ortaya koyduğu çözüm yolu dışında başka bir çözüm yolu ile problemi doğru çözen bir öğrenci bulunmamaktadır.

İkinci soru için elde edilen bulgularda ise doğru cevap verenlerin genelde söylemsel ve işlevsel kavrama türlerini kullandıkları ancak soruyu yanlış çözenlerin bu iki kavrama türüne ek olarak daha çok algısal kavramayı da kullandıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin bir matematiksel problem karşısındaki kavrama türlerinin algısal olduğu zaman yanlış sonuçlara ulaşabildiklerini, ancak söylemsel ve işlevsel kavramayı kullandıkları zaman problemi mantıklı bir matematiksel çerçeveye oturtarak doğru sonuca ulaşabildiklerini göstermektedir. Bu sonuç Panaoura ve Gagatsis'in (2009) çalışma sonuçları ile paralellik göstermektedir. Araştırmacılar çalışmalarında geometrik muhakemeleri algısal kavramaya dayanan öğrencilerin hatalı çözümlere ulaştıklarını belirtmişlerdir. Buna ek olarak Deliyianni ve arkadaşları (2011) tarafından yapılan çalışma, geometrik bir şeklin anlaşılmasının algısal ve sıralı kavramadan ziyade işlevsel kavramayla daha güçlü bir bağlantısının olduğunu ortaya koymuştur. Öğrencilerin verilen soruyu çözmelerinde evreler arası düzeyde olmalarının etkisinin çok olmadığı görülmüştür. Çünkü hem soruyu doğru çözen hem de yanlış çözen öğrencilerin evreler arası düzeyde işlem yaptıkları görülmektedir. Ancak soruyu doğru çözen öğrencilerden hiçbirinin evre içi düzeyde bulunmaması ve soruyu yanlış çözen öğrencilerden hiçbirinin ise evreler ötesi düzeyde değerlendirilmemesi bu iki düzeyin sorunun çözümünde etkili olduğu yönünde yorumlanabilir.

Üçüncü soru ise uygulamaya katılan öğrencilerin çoğunun en çok zorlandığı soru olmuştur. Bu soruda öğrencilerden üç köşesi de kâğıt üzerinde bulunmayan üçgenin çevresini bulmak için bir yöntem geliştirmeleri istenmiş ancak öğrencilerin çoğu (30 öğrenci) bu soruyu boş bırakmıştır. Öğrencilere verilen soruyu çözmeleri için yeterli süre tanınmış olmasına rağmen en çok boş bırakılan sorunun üçüncü soru olmasının, öğrencilerin bu soruda daha önceki stratejilerini başarılı bir şeklide kullanamamalarından kaynaklandığı düşünülebilir. Ayrıca bu soruyu boş bırakan öğrencilerden bazıları ikinci soruyu çözemediklerinden bu soruyu da çözemeyeceklerini düşünmüş olabilirler.

Üçüncü soru için doğru kabul edilebilecek bir çözüm sunan öğrencilerin (4 öğrenci) ilk sorularda farklı kavrama türlerine sahip olsalar bile üçüncü soruda söylemsel kavramaya sahip oldukları gözlenmiştir. Bu soru öğrencilere ilk soruda kullandıkları stratejilerinin işe yarayamayabileceğini göstererek onları farklı stratejiler geliştirmeye yöneltmiştir. Bu ise onların algısal kavramadan ziyade söylemsel kavrama türüne uygun hareket etmelerini sağlamıştır. Yani bu öğrenciler algısal kavramayla hareket ederek sorunun çözümüne ulaşamamış, bu sebeple kavrama türlerini değiştirmişlerdir. O halde diyebiliriz ki, soruya ilk bakışta algısal kavramayla hareket etmek öğrencilerin diğer kavrama türlerine uygun düşünmelerini engellemiştir. Bu sonuç Michael-Chrysanthou ve Gagatsis'in (2013) çalışma sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Araştırmacılar algısal kavramanın sıklıkla işlevsel kavramanın uygun şekilde kullanılmasına engel olduğunu ifade etmişlerdir. Son soruyu yanlış cevaplayan öğrenciler ise tıpkı diğer sorulardaki gibi algısal kavramayı kullanmış olanlardır. Aslında Samson'un (2010) belirttiği üzere algısal kavrama, genelleme sürecinde ortaya konan geştalt kurallarını gerektirmemektedir. Algısal kavramayı aşamama keşifsel yoksunluk (heuristic deficiency) ile sonuçlanabilir. Bir şekil üzerinde muhakeme edebilmek için şeklin kapsamını bilmenin yanı sıra bu kapsamı esnekçe kullanabilmek de gereklidir. Böylece bir şekli farklı bakış açıları ile irdeleyebilmek için algısal kavramanın ötesine geçmek şarttır. Bu araştırmada her ne kadar algısal kavramanın kullanıldığı durumlar ortaya konulmuş olsa da öğrencilerden hiçbiri sadece algısal kavrama ile işlem yapmamıştır. Ayrıca, verilen problemleri doğru çözen öğrencilerin algısal kavramanın ötesine geçebildikleri ve bu kavrama türüne yazılı cevaplarında yer vermedikleri görülmüştür. Mevcut çalışmada kullanılan kesik üçgen problem dizisinin geştalt kuralları dahilinde analizi yapılmamış bunun yerine öğrenci cevapları evre içi, evreler arası ve evreler ötesi şekilsel evrelemesine göre yorumlanmaya çalışılmıştır. Ancak geştalt kuralları ile farklı kavrama türlerinin ilişkisini inceleyen çalışmaların önem arz ettiği söylenebilir.

Araştırmanın bir sonucu da çalışma kağıtlarına verilen cevaplarda algısal kavramayı kullandığı tespit edilen öğrencilerin geometrik problemi doğru çözemedikleridir. Balacheff (1988) çalışmasında problemi çözemeyen öğrencilerin sonuca ulaştıran bir çözüm stratejisi geliştirememiş olma nedenini didaktik antlaşma kavramını kullanarak analiz etmiş ve öğrencilerin Thales teoremini kullanmama sebeplerini bu teoremi düşünmemiş olma, başka bir deyişle teoremin öğrencinin çalışma ortamının elemanı (milieu'nun elemanı) olmayışına dayandırmıştır. Geometri sorularının çözümünde etki eden faktörleri inceleyen çalışmalarında Gal ve Linchevski (2010) algı temelli bilgi temsili (perception-based knowledge representation) kavramını kullanmışlardır. Böylece şekle ilk bakıldığında görsel olarak elde edilen bilgilerin zihinde muhafaza edildiğini ileri sürmüşlerdir. Bu açıdan elde edilen sonuçlar incelendiğinde, öğrenciler her ne kadar söylemsel ve işlevsel kavrama türünü çözümlerinde kullanmış olsalar da algısal kavramanın da işe koşulduğu durumlar bulunmaktadır. Böylece, Gal ve Linchevski'nin (2010) çerçevesinden bakıldığında, bu çalışmaya katılan öğrencilerin, algı-temelli bilgi temsillerinde paralellik veya üçgenin köşe noktalarının üçgenin içinde çakışacağı gibi bazı bilgileri ilk bakışta algılayıp daha sonrasında da bu bilgileri zihinlerinde muhafaza ederek işlem yaptıkları düşünülebilir.

Ayrıca öğrencilerin, verilen üçgen üzerinde işlem yaparken üçgenin kenarlarının bir parçasını belirten ve matematiksel veri olarak hiçbir değeri bulunmayan doğru parçalarının uç noktalarını kullanarak çizim yapmış oldukları dikkat çekmektedir. Bu kullanım başka alanlarda da kendini göstermektedir. Örneğin, açılarda açı işaretinin büyük ya da küçük yapılmasının açının ölçüsünü tahmin etmede etkili olduğu bulgusu (Gibson, Congdon & Levine, 2015) tarafından rapor edilmiştir. Benzer şekilde, açıyı belirleyen ışınların kâğıt üzerinde bitiş noktalarının öğrenciler tarafından sıkça kullanıldığı (Berthelot & Salin, 1996) tarafından rapor edilmiştir.

Mevcut araştırmanın bir diğer sonucu ise, işlevsel kavrama türünün kullanımının çözümde hatalara sebep olabildiğidir. Bu hataların, öğrencilerin işlevsel kavrama üzerine doğrudan bir eğitim almamış olmalarından kaynaklandığı düşünülebilir. Böylece bu araştırmada Duval'in (1994) belirttiği üzere öğrenciler verilen şekli *keşifsel araştırma yazmacı (register of heuristic exploration)* olarak kullanabilmiş ancak problemin çözümüne ulaşmada bazı güçlüklerle karşılaşmışlardır.

Bu araştırmanın bulguları sonucunda hiçbir öğrencinin çözüm esnasında sıralı kavramayı kullanmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonucun sebebi öğrencilere verilen problem dizisinin çözümü aşamalı bir geometrik çizim yapmayı gerektirmemekte ve bu ihtiyacı da hissettirmemekte olduğundan kaynaklandığı şeklinde yorumlanabilir. Duval'in (1988) sıralı kavramanın daha çok geometrik çizim problemleri söz konusu olduğunda kullanıldığını belirtmiş olması bu yorumu destekler niteliktedir.

Çalışmada açığa çıkarılan bir diğer sonuç ise öğrencilerin geometrik bir problemi çözerken farklı kavram türlerini ortaya koydukları ve bu kavrama türleri arasında geçişler yaptıklarıdır. Bu sonuç, Samson'un (2010) geometrik örüntü problemlerinin çözümünde, farklı kavrama türleri arasındaki geçişin öğrencilerin geliştirdikleri çözüm yolları için önemli olduğu sonucuyla örtüşmektedir. Öğrenciler tarafından kullanılan kavrama türlerinin ve bu kavrama türleri arasındaki geçişli ilişkilerin, bu ilişkileri etkileyen faktörlerin daha kesin belirlenebilmesi adına araştırmaların yapılması önerilmektedir. Bunun için, veri olarak, öğrencilerin cevap kağıtlarını içeren yazılı dokümanlarla birlikte cevap kağıtları ile ilgili öğrencilerle sözlü mülakatların kullanılması daha aydınlatıcı olacaktır.

Son olarak bu çalışmada kısmen ortaya çıkarılan sonuç öğrencilerin geometrik bir problemi çözerken kullandıkları kavrama türünün problem çözümünde önemli bir etkiye sahip olduğudur. Bu sonuç Gagatsis ve arkadaşlarının (2010) ve Deliyianni ve arkadaşlarının (2011) çalışmalarında ulaştıkları, kavrama türlerinin geometrik bir şekli anlamada etkili olduğu sonucuyla örtüşmektedir. Bu sebeple bir problem durumunda öğrencilerin doğru sonuca ulaşabilmeleri için öncelikle onların probleme bakış açıları ve problemi kavrama türleri geliştirilmelidir. Bunun yapılabilmesi için özellikle matematik öğretmen adaylarına Duval'in kavrama türlerinin örneklerle tanıtılması önerilmektedir. Bu sayede öğretmen adayları hem kendilerinin hem de gelecekteki öğrencilerinin öğrenmelerine katkı sağlanabilirler.

A Mathematical Problem Condition: Truncated Triangles

Extended Abstract

Introduction

Geometric reasoning refers to the recognition of geometric shapes and objects in the general sense, and the relationship between them (Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2013). The ability of students to use geometry at the desired level depends on their ability to make geometric reasoning and the development of these skills is the most important aspect of teaching geometry. When Duval's (1995) cognitive model is examined from the theories put forward up to this point, it is seen that there are four perceptual processes which have no hierarchical relationship with each other. These perceptual processes are defined as *a perceptual apprehension* that includes the information obtained at first sight; as *a discursive apprehension* involving the process of establishing relations between figure and mathematical principles; as *a sequential apprehension* that is the process of establishing a geometric shape with the aid of a tool; as *a operative apprehension* involving changes to the first image (part-whole, optical and spatial) (Duval, 1995).

In this study, in addition to Duval's perceptual processes, we also benefitted from the intra-stage, inter-stage and trans-stage concepts introduced by Piaget and Garcia (1989), in the sense that they would help to understand students' mental structures. In this context, this research is important in terms of analyzing the stages of developmental logic with different types of cognitive apprehension used against geometric problem sequences. In this study, within the scope of theorical frameworks mentioned above, it is aimed to investigate that the types of cognitive apprehension that pre-service mathematics teachers have in the face of a mathematical problem situation and in what ways they use them, and to reveal that which developmental logic stages they have and how they operate on them according to types of apprehension they use.

Research Method

This study is a case study and the obtained data has been analyzed descriptively. This study was carried out with 46 pre-service mathematics teachers. In the study, the data were collected with worksheets distributed to pre-service mathematics teachers. First question on these worksheets is used by Balacheff (1988, 1991) and the second and third questions are the ones used by Grenier (2010). These questions consist of the problem of the calculation of the perimeter of the truncated triangles.

Findings

When the solutions of the pre-service mathematics teachers who answered the first question correctly were examined, it was seen that these pre-service mathematics teachers were able to reason by using the given elements/parts of the figure without needing to complete the figure, use different features of triangles, manipulate triangular features with different mathematical properties, so they were seen to be in the inter-stage and/or trans-stage. In addition, these pre-service mathematics teachers have applied the Thales theorem with the help of parallel lines drawn through any of the given edges in the triangle. The fact that these pre-service mathematics teachers try to solve the given triangle by exploiting a theorem or feature of the triangle indicates that they primarily use the discursive apprehension.

Two of the pre-service mathematics teachers who answered the second question correctly were evaluated at the trans-stage and the rest of the pre-service teachers who answered correctly to the second question were evaluated at the inter-stage. Pre-service mathematics teachers assessed at the trans-stage drawn the completed state of the given triangle as a sketch in order to reach the solution. In solution strategies, these pre-service mathematics teachers split the figure into sub-figures, in other words they formed different right triangles within the triangle and formed similarities between these right triangles. While this solution strategy can be assessed as being at an inter-stage, the fact that these two pre-service mathematics teachers have adapted the problem in a general way independently of the given form and they have carried out operations with the features of the structure they have adopted indicate that they may have passed to a trans-stage. In addition, the fact that pre-service mathematics teachers have chosen points independent of the elements of the given drawing in the selection of the elements of the set of points forming the triangle supports the finding that they operate at the trans-stage. Moreover, since these pre-service mathematics teachers by establishing a similarity relation between the lengths given on triangles they have completed tried to reach the solution with geometric reasoning, they used the discursive apprehension.

When the solutions of the pre-service mathematics teachers who responded wrongly to the second question were examined, it has been seen that the most of these pre-service mathematics teachers have fallen into the wrong place because they use the perceptual apprehension somewhere in their solutions. This is because pre-service mathematics teachers think that if the cut edges of the truncated triangle are drawn into the triangle, they will overlap (inside the triangle). That is, the pre-service mathematics teachers tried to create a kind of butterfly in the triangle and assumed that the triangle would be completed if this butterfly was opened. It has been concluded that the pre-service mathematics teachers have realized these assumptions by using a kind of the operative apprehension (spatial) and the perceptual apprehension together. Besides, the fact that these pre-service mathematics teachers try to complete the triangle without giving any geometric information, but with a feature which they just assumed, indicate that they use a perceptual apprehension in the solution.

Though two of the pre-service mathematics teachers who developed the right solution for the third problem had also their perceptual apprehension in the first question, they changed their strategies in the third question, tried to portray the whole figure, then used the Thales theorem and reached the correct solution. When their solution to the third question is examined, it is seen that these pre-service mathematics teachers have a discursive apprehension in the solution of this problem.

It is seen that in case of incorrect solutions in the third question, the two pre-service mathematics teachers try to use the first question's strategies for the third question. In the same way as they did in other questions, these pre-service mathematics teachers tried to get the symmetry of the cut-away corners according to the edge of the paper, folded some kind of cut edges on the triangle and thought that the whole of these cuts would be inside the triangle. Thus, it was observed that these pre-service mathematics teachers were at an inter-stage and they were engaged in both perceptual and discursive apprehension, while at the same time continuing to use a kind of the operative apprehension (spatial).

Conclusion

In this study, the types of cognitive apprehension of pre-service mathematics teachers in the face of a mathematical problem situation are examined. For this purpose, problems of the truncated triangle were directed to the pre-service teachers in the 3rd grade of Elementary Mathematics Teacher Education and the pre-service mathematics teachers tried to be exposed to the types of cognitive apprehension in problem approaches and in determining the solution methods.

As a result of the study, it is seen that the types of cognitive apprehension that pre-service mathematics teachers exhibit in the face of a mathematical problem situation are quite different. Moreover, types of cognitive apprehension that pre-service mathematics teachers use when solving a geometric problem have an important influence on problem solving. This is in line with the findings of previous research studies (e.g. Deliyianni et al., 2011; Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, Elia, Michael, Kalogirou, Panaoura ve Phillippou, 2010). For this reason, in order to enable the pre-service mathematics teachers to reach the right result in the event of a problem, firstly their point of view and types of their cognitive apprehension should be developed. In order to be able to do this, it is proposed that pre-service mathematics teachers especially introduce Duval's conceptions with examples. In this way, pre-service mathematics teachers can contribute to their learning as well as their future students.

Kaynaklar/References

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des eléves de collége* (Yayınlanmamış doktora tezi). Universite Joseph Fourier, Grendole.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans: identification d'un obstacle didactique. *Revue des Sciences de L'éducation, 222*, 417–442.

Biber, C., Tuna, A., & Korkmaz, S. (2013). The mistakes and the misconceptions of the eighth grade students on the subject of angles. *Europan Journal of Science and Mathematics Education, 1*(2), 50-59.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2013). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (15. baskı). Ankara: PegemA Yayıncılık.

Chen, C. L., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometric reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 285-307.

D'Amore, B. (2001). Conceptualisation, registres de representations sémiotiques et noétique: Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 2*, 143-168.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou A., & Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon, France: INRP.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Kalogirou, P., & Kusniak A. (2011). *Towards comprehensive theoretical model of students ́ geometrical figure understanding and its relation with proof.* Retrieved July 06, 2017 from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_deliyianni.pdf

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton, D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Netherlands: Springer.

Duval, R. (1988). 'Graphiques et ́equations: l'articulation de deux registres'. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de la didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM, 17*, 121-138.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherlandand & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-156). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37–52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 3–26). Columbus, OH: ERIC Clearing-House for Science, Mathematics and Environmental Education.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Fernandes, S. H. A. A., & Healy, L. (2013). Multimodality and mathematical meaning-making: Blind students' interactions with symmetry. *RIPEM, 3*(1), 36-55.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., & Phillippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *10*, 35-50.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics, 74,* 163–183.

Gallagher, S. (2015). Doing the math: Calculating the role of evolution and enculturation in the origins of geometrical and mathematical reasoning. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, *119*, 341-346.

Gibson, D. J., Congdon, E. L., & Levine, S. C. (2015). The effects of word-learning biases on children's concept of angle. *Child Development*, *86*(1), 319-326.

González, R. (2015). *Semiotic-cognitive theory of learning.* Retrieved August 16, 2017 from http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2011/11/Semiotic-CognitiveTheory-of-Learning.pdf

Gray, E. (1999). Spatial strategies and visualization. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference* (Vol. I, pp. 235-242). Haifa: Israel Institute of Technology.

Grenier, D. (2010). Activité... Deux problemes autour de Thales. *Petit x*, *84*(3), 46-50.

Güven, B. ve Karpuz, Y. (2016). Geometrik muhakeme: Bilişsel perspektifler. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 245-263). Ankara: PegemA Yayıncılık.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des Sciences de L'éducation, 30*(2), 329–354.

Karpuz, Y., Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 108-118.

Köse, N. Y., Uygan, C. ve Özen, D. (2012). Dinamik geometri yazılımlarındaki sürükleme ve çeşitlerinin geometri öğretimindeki rolü. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *3*(1), 35-52.

Laborde, C. (1992, August). *Enseigner la géométrie: Permanences et révolutions*. Paper presented at 7ème Congrès International sur L'enseignement des Mathématiques (ICME- 7), Québec, Canada.

Magdaş, I. (2015). Analogical reasoning in geometry education. *Acta Didactica Napocensia*, *8*(1), 57-65.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: An obstacle or heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *13*, 17-32.

Or, A. C. M. (2013). Designing tasks for visualization and reasoning in dynamic geometry environment. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. I, pp. 89–98). UK: Oxford University Press.

Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2009). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 746-755). Lyon: INRP.

Piaget, J., & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.

Samson, D. A. (2010). Enactivism and figural apprehension in the context of pattern generalisation. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. I, pp. 501-508). Fremantle: MERGA Inc.

Schmitz, A., & Eichler, A. (2015, February). *Teachers' individual beliefs about the roles of visualization in classroom*. Paper presented at 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-9), Prague, Czech Republic.

Tapan, M., & Arslan, Ç. (2009). Preservice teachers' use of spatio-visual elements and their level of justification dealing with a geometrical construction problem. *US-China Education Review*, *6*(3), 54-60.

Tapan Broutin, M. S. (2010). *Bilgisayar etkileşimli geometri öğretimi, Cabri geometri ile dinamik geometri etkinlikleri* (1. baskı). Bursa: Ezgi Kitabevi.

Tapan-Broutin, M. S. (2014). Matematiksel nesnelerin yapısı ve temsiller: Klasik semiyotik üçgenin geometri öğretiminde yansımalarının analizi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*(1), 255-281.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev. Ed., 7. baskı). Ankara: Nobel Yayınevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Kaynak Gösterme

Gürhan, S. ve Tapan-Broutin, M. S. (2017). Bir matematiksel problem durumu: Kesik üçgenler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 8*(3), 408-437.

Citation Information

Gürhan, S. & Tapan-Broutin, M. S. (2017). A mathematical problem condition: Truncated triangles. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(3), 408-437.