İrrasyonel Sayı Kümesinin Rasyonel ve Gerçek Sayı Kümeleriyle Olan İlişkisine Yönelik Öğrenme Güçlükleri[1]

Yusuf Emre Ercire[2], Serkan Narlı[3] ve Esra Aksoy[4]

Makale geçmişi
Makale geliş tarihi: 30 Temmuz 2015
Yayına kabul tarihi: 10 Temmuz 2016

Öz: Bu çalışmada irrasyonel sayı kümesi ile rasyonel ve gerçek sayı kümelerinin ilişkilerine yönelik öğrencilerin öğrenme güçlüklerini araştırmak amaçlanmıştır. Bu amaçla açık uçlu sorulardan oluşan "İrrasyonel Sayı Kavram Testi' geliştirilmiştir. Geliştirilen veri toplama aracı 8.sınıfta öğrenim gören 58 öğrenciye ve 9.sınıfta öğrenim gören 50 öğrenciye uygulanmıştır. Farklı kademelerden maksimum çeşitlilik örneklemesi ile seçilen 5'er öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Öğrencilerin her iki kademede de gerçek sayı kümesi ile diğer sayı kümelerinin arasındaki ilişkiyi anlamada güçlük yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerde irrasyonel sayılarının tamamının gerçek sayı olamayabileceği düşüncesi ile bir sayının hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceği düşüncesi mevcuttur. Bu yanlış düşüncelere sahip öğrenci oranının 8.sınıflarda 9.sınıflara göre daha fazla olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Öğrenme güçlükleri, irrasyonel sayı, gerçek sayı

DOI: 10.16949/turcomat.47225

Abstract: The aim of this study is to investigate students' difficulties about the relation between irrational number set, rational number set and real number set. For this purpose, 'Irrational Number Concept Test' which was composed of open-ended questions has been developed. The Data collection instrument was applied to 58 students in grade 8 and 50 students in grade 9. Semi-structured interviews with ten students who were selected from different levels with the maximum diversity sampling were conducted. In each grade, it was found that students had difficulties in understanding the relationship between real number set and other number sets. There have been some thoughts such as 'all of the irrational numbers are not real numbers' and 'a number can be both rational and irrational'. It is found that the rate of students that have these wrong thoughts in 8th grades is more than those in 9th grades.

Keywords: Learning difficulties, irrational number, reel number

See Extended Abstract

1. Giriş

Matematik öğrenme sürecinde hata ve kavram yanılgısı terimleri, bireylerin karşı karşıya geldiği öğrenme güçlüklerini ifade etmek için kullanılabilmektedir (Bingölbali ve Özmantar, 2009). Uygulamadan kaynaklanan yanlış cevaplar hata olarak değerlendirilebilir. Hata, hem uzman hem de deneyimsiz kişiler tarafından dikkatsizlik sonucu yapılabilir. Kolay bir şekilde ortaya çıkarılır ve hemen düzeltilebilir. Kavram yanılgısı ise basit hatadan çok sistemli bir şekilde insanı hataya teşvik eden algı biçimidir (Zembat, 2008). Birey yaptığı hatayı ufak bir uyarı ile fark edip düzeltebilir. Oysa kavram

[1] Bu çalışma 2. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildirinin genişletilmiş halidir.
[2] Doktora Öğrencisi, Öğretmen, Ahmetli Kargın Ortaokulu, MEB, *yusuferc@gmail.com*
[3] Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi, *serkan.narli@deu.edu.tr*
[4] Doktora Öğrencisi, Öğretmen, Turgutlu 19 Mayıs Ortaokulu, MEB, *esrarengiz-114@hotmail.com*

yanılgısına sahip birey uyarıldığı zaman genelde önce kendini savunmaya geçer. Kişi ikna olmadığı takdirde kavram yanılgısından vazgeçmez.

Matematikte söz konusu güçlüklerin yaşandığı kavramlardan biri irrasyonel sayı kavramıdır. Bu kavram, tarihi gelişiminde matematikçilerin de anlamlandırmakta zorluklar yaşadıkları bir kavramdır (Sertöz, 2002). Matematiğin bazı nesneleri (tanımları, yöntemleri, ispatları vs.), matematiği üreten matematikçileri bile tatmin etmiyorsa söz konusu nesneler, öğrenciler için de büyük sorunlar ve öğrenme güçlükleri doğurabilir (Erdoğan, 2009). Kavramsal bilgi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değildir. Kavramsal bilgide kavramlar arasındaki ilişkinin kurulması gerekmektedir. Kavram bilgisi çok çeşitli ve farklı kavramların ilişkileriyle birbirlerine zincirleme bağlıdır (Adıgüzel, 2013). Matematik, konuları güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğundan dolayı herhangi bir kavram onun ön şartı durumundaki diğer kavramlar kazandırılmadan tam olarak verilemez (Altun, 1998). İrrasyonel sayılar tanımlanmadan rasyonel sayılardan reel sayılara geçmek mümkün değildir. Çünkü irrasyoneller sistemin bir parçasıdır, onlar olmadan sistem tamamlanmaz (Courant & Robbins, 1941/1978). Bu nedenle de ön şart durumunda olan irrasyonel sayı kavramının iyi öğrenilmesi ve öğrencilerin öğrenme güçlüklerinin tespit edilmesi ve giderilmesi oldukça önemlidir (Tatar, Okur ve Tuna; 2008).

1.1. İrrasyonel sayıların öğrenilmesi ile ilgili güçlükler

8. sınıfa kadar sayıları, rasyonel sayılardan ibaret sanan öğrenciler, bu düzeyde irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar olmak üzere, iki yeni sayı kümesiyle daha tanışmaktadır. Bu sayı kümeleri, Milli Eğitim Bakanlığı (MEB, 2013a) ortaokul matematik öğretim programında, 8.sınıfta "Sayılar ve İşlemler" öğrenme alanında yer alan, "gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir" kazanımıyla yer almaktadır. Bu sayı kümeleri tekrar Milli Eğitim Bakanlığı (MEB, 2013b) ortaöğretim matematik öğretim programında, 9.sınıfta "irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümesini açıklar" kazanımı ile karşımıza çıkmaktadır İrrasyonel sayıların matematiksel tanımı Dedekind kesimi veya Cauchy dizileri kullanılarak formal olarak yapılabilir. Ancak öğrencilere, "İrrasyonel sayılar, a ve b tam sayı ve b≠0 olmak şartıyla a/b şeklinde oranlı yazılamayan sayılardır." tanımı yapılabilir. Rasyonel sayılardan yola çıkarak, "Rasyonel olmayan gerçek sayılara irrasyonel sayılar denir" şeklinde de tanım yapılabilir. Her bir gerçek sayının gerçel sayı ekseninde bir noktaya karşılık geldiği düşünüldüğünde ondalık gösterimden yola çıkarak, "Ondalık kısmı devretmeyen gerçek sayılara irrasyonel sayılar denir" şeklinde de irrasyonel sayılar ifade edilebilir (Zazkis, 2005).

İrrasyonel sayı kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Fakat öğrenciler tarafından anlaşılması zor olabilen, öğrenme güçlüklerine, yanılgılara oldukça açık bir kavramdır. İrrasyonel sayı kavramı, doğası gereği zordur ancak rasyonel sayı sisteminden reel sayı sistemine sayı kavramını yapılandırmak (reconstruction) için irrasyonel sayıları anlamak gereklidir. İrrasyonel sayıların anlaşılması ile ilgili çalışmalar daha çok ispat, limit ve sonsuzluk üzerine yapılan yayınlarda görülebilmekte, doğrudan irrasyonel sayı kavramına odaklanan eğitim çalışmalarına ise daha az rastlanmaktadır (Sirotic & Zazkis, 2007a). Çalışmalar incelendiğinde, şaşırtıcı biçimde, irrasyonel sayıları kavramada öğretmenlerde de öğrencilere benzer güçlükler yaşandığı görülmektedir. İrrasyonel sayıların okullarda nasıl öğretildiği ve öğrencilerin ne anladıkları üzerine yapılan araştırmalardan biri olan Fischbein, Jehiam ve Cohen'in (1995) çalışmasında tarihsel ve psikolojik ön bilgilere dayanarak irrasyonel sayıların öğrenilmesinin önünde iki engel olduğu gösterilmiştir: oransızlık ve sayılamazlık. Ayrıca, katılımcılarda sezgisel zorlukların öğrenmeyi güçleştirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Temel sorunun ise katılımcıların herhangi bir sayının irrasyonel ya da rasyonel olduğunu anlayamamaları ve bu iki kümeden birine sayıyı yerleştirememeleri olduğu ifade edilmiştir. İrrasyonel sayıların öğrenilmesinde var olan engellere rasyonel sayılarımin tam öğrenilmemesi, Fishbein ve arkadaşlarının (1995) belirttiği sezgisel güçlükler gibi farklı argümanlar gösterilebilir. Voskoglou ve Kosyvas (2011) ise irrasyonel sayıları öğrenmedeki en temel engelin kendi temsillerinden kaynaklandığını iddia etmiştir. Lise öğrencileri ve mühendis adayları ile yapmış oldukları bu çalışmada semiyotik temsillerin güçlüklere neden olduğunu göstermişlerdir.

Peled ve Hershkovitz (1999) ise yaptıkları çalışmada Fischbein ve arkadaşlarının (1995) aksine öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların karakteristiklerini ve tanımını bildiklerini belirtmiş, irrasyonel sayıya ait kavram yanılgılarının daha çok limit süreci ile ilgili olduğunu rapor etmişlerdir. Yine bu çalışmada öğretmen adaylarının irrasyonel sayılarla ilişkili olan problem durumlarında bu tanımları esnek bir şekilde kullanamadığı konuyla alakalı temsiller arası bağlantıları kuramadıkları görülmüştür. Örneğin öğretmen adayları bir irrasyonel sayının aynı zamanda reel sayı olduğunu söyleyebilmelerine rağmen bu sayının sayı doğrusu üzerinde bir yeri olduğunu düşünemedikleri belirtilmiştir.

Zazkis ve Sirotic (2004) PME'de yayınlanmış bildirilerinde, öğretmen adaylarının irrasyonel sayıları anlamlandırmalarında temsil biçimlerinin etkisini incelemiş ve sonuçlarını yayınlamışlardır. Öğretme pratiği olarak temsillerin üzerinde daha fazla durulması gerektiği ve temsillerin kullanımından doğacak sonuçların incelenmesinin faydalı olacağı söylenmiştir. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin anlayışlarını, sayı kümelerinin zenginliği ve derinliği, reel sayı doğrusuna rasyonel ve irrasyonel sayıların yerleştirilmesi ve bu iki sayı kümesi arasındaki işlemler bağlamında ele alan (Sirotic & Zazkis, 2007a; Güven, Çekmez & Karataş, 2011) ve ortaokul matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların sayı doğrusunda gösterimine odaklanan (Sirotic & Zazkis, 2007b) çalışmalara da rastlanmaktadır. Bunlardan biri olan Sirotic ve Zazkis (2007a) çalışmasında ortaokul matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin anlayışları ele alınmıştır. Çalışma 46 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiş ve katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki ilişkilere dair bilgilerinin çeşitli boyutları incelenmiştir. Çalışmalarında 3 konu ele alınmaktadır: Sayıların zenginliği ve derinliği, reel sayı doğrusuna rasyonel ve irrasyonel sayıların yerleştirilmesi ve bu iki sayı kümesi arasındaki işlemler. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunun irrasyonel sayılara ilişkin çok sınırlı bilgiye sahip oldukları ve irrasyonel sayıları tanımlama, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki işlemler ile ilgili kavram yanılgılarına sahip oldukları belirtilmiştir. Arbour (2012), fen fakültesi öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmada reel, irrasyonel ve rasyonel sayıların anlaşılırlığını araştırmıştır. Bu sayıların arasındaki ilişkilerin anlaşılırlığına yönelik de farklı boyutlardan inceleme yapmışlardır. Çalışmada, çeşitli sayılar vererek bunların rasyonel, irrasyonel veya gerçek sayı olup olmadığı; irrasyonel sayıların tamamının gerçek sayı olup olmadığı, irrasyonel ve rasyonel sayı kümelerinin kesişimlerinin boş küme olup olmadığı ve iki sayı kümesinden alınan elemanlarla yapılan işlemlerin sonuçlarının hangi kümeye ait olduğuna yönelik sorular sorulmuştur.

Adıgüzel (2013), çalışmasında 8.sınıf öğrencileri ve matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılar konusundaki bilgilerini ve kavram yanılgılarını belirlemeyi amaçlamıştır. Öğrencilerin ve matematik öğretmen adaylarının birçoğunun irrasyonel sayılarla ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu belirtilmiştir. Ayrıca rasyonel ve irrasyonel sayıların arasındaki ilişkiyi anlamada güçlüklerin yaşandığı, bir sayının irrasyonel olduğunun bilinmesine rağmen bu sayının rasyonel de olabileceğine ilişkin yanılgıların olduğu ifade edilmiştir.

Yapılan çalışmalar göstermektedir ki her kademede irrasyonel sayıların ve dolayısıyla da ilişkili olduğu gerçek sayılar ve rasyonel sayıların öğrenilmesine yönelik çeşitli güçlükler yaşanmaktadır. Bu güçlükler farklı araştırmalarda farklı yönlerden ele alınmış ve ortaya konulmaya çalışılmıştır. İrrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik güçlükler de bu yönlerden biridir. Yapılan çalışmalarda sayı kümelerinin ilişkileri farklı boyutlardan ele alınarak incelenmiştir. İrrasyonel sayılarla ilgili yapılmış çalışmalar göz önüne alındığında araştırmaların birçoğunda verilen bir sayının hangi kümeye veya kümelere ait olduğu sorularına yer verildiği ancak doğrudan irrasyonel sayı kümesi-rasyonel sayı kümesi, gerçek sayı kümesi-irrasyonel sayı kümesi ilişkisine yönelik sorgulamaların çok az çalışmada yapıldığı görülmüştür. Bu çalışmalardan olan Arbour (2012) ve Adıgüzel (2013)'deki sorulardan da yararlanarak bu çalışmada irrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik öğrenme güçlükleri bir boyuttan araştırılmış ve sorulan sorular özelinde ele alınmıştır. Çalışmanın amacı irrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle ilişkisine yönelik öğrencilerin olası öğrenme güçlüklerini araştırmaktır. Ancak rasyonel sayı-gerçek sayı kümeleri arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesinin irrasyonel sayı kavramının öğrenilmesini etkileyebileceği düşünülerek bu iki sayı kümesinin ilişkisi ile ilgili de sorgulama yapılmıştır.

2. Yöntem

Bu çalışma yüksek lisans tez çalışmasının bir parçası olup nitel türde betimsel bir araştırmadır. Ayrıca örnek olay (case study) niteliği taşımaktadır. Karmaşık, özel ve ilginç bir olgunun, durumun kendi koşulları içerisinde incelenmesi söz konusu olan çalışmalar örnek olay çalışmalarıdır (Sönmez ve Alacapınar, 2011). Bu çalışmada irrasyonel sayı kümesinin diğer sayı kümeleriyle ilişkisine yönelik güçlükler; öğrencilerden toplanan yazılı ve sözlü veriler ışığında araştırılmıştır.

2.1 Çalışma grubu

Öğretim programları incelendiğinde, irrasyonel sayılara yönelik kazanımların 8. ve 9. sınıf düzeylerinde yer aldığı görülmüş ve verilerde çeşitlilik sağlanması amacıyla bu iki farklı kademedeki öğrenciler ile çalışılmıştır. Araştırma İzmir'de biri devlet biri özel olmak üzere iki ortaokulun 8. sınıfında öğrenim gören 58 öğrenci ve bir devlet lisesindeki 9.sınıfta öğrenim gören 50 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmanın yürütüldüğü özel ortaokul merkezi sınavlarda İzmir'de üst sıralarda yer alan bir okuldur. Bu okuldan 25 öğrenci seçilmiştir. 33 öğrencinin seçildiği devlet ortaokulu ise merkezi sınavlarda alt sıralarda yer almaktadır. 9.sınıf öğrencilerinin seçildiği devlet lisesi merkezi sınavla öğrenci alan başarılı bir Anadolu Lisesidir. Çalışmaya katılan tüm öğrencilere açık uçlu sorulardan oluşan "İrrasyonel Sayı Kavram Testi" uygulanmıştır. Testin ilk aşamasında, öğrencilere rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayı denildiğinde akıllarına neler geldiği ve bu kavramların tanımları sorulmuş ayrıca her birinden 5'er tane sayı örneği vermeleri istenmiştir. Öğrencilerin tanımlarla ilgili sorulara vermiş oldukları yanıtlar incelenmiş ve bu yanıtlara göre öğrenciler, "irrasyonel sayı tanımını bilmeyip doğru örnekler veren öğrenciler, geçerli bir tanım yaptığı halde yanlış örnekler veren öğrenciler, tanımı ondalık temsile bağlı olarak yapıp örneklerde de ondalık temsilden yararlanan öğrenciler veya tanımı kareköklü temsile dayalı yapıp örnekleri de kareköklü yapan öğrenciler" gibi çeşitli kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilere göre maksimum çeşitleme örneklemesiyle seçilen beşer 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencisiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

2.2 Veri toplama araçları

Araştırmada kullanılmak üzere genel olarak açık uçlu sorulardan oluşan "İrrasyonel Sayı Kavram Testi" geliştirilmiştir. Bu test, Sirotic ve Zazkis'in (2007a); Fischbein ve arkadaşlarının (1995); Kara ve Delice'nin (2012) çalışmalarından da yararlanılarak oluşturulmuş ve ayrıca daha derinlemesine ve çeşitli bilgi edinmek amacıyla yeni sorularla zenginleştirilmiştir. Dokuz görevden oluşan bu kavram testinde öğrencilerin sayı kümelerini tanımlamada, sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkilerini kavramada, verilen bir sayıyı sınıflamada, π sayısının değerini belirlemede, irrasyonel sayıların ondalık ve köklü gösterimlerinde, irrasyonel sayıların yoğunluklarını kavramada ve irrasyonel sayılardaki toplama-çarpma işlemlerinde yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarmak amacıyla sorular hazırlanmıştır. Uzman görüşü alınarak soruların irrasyonel sayılarla ilgili güçlükleri belirlemede kapsam geçerliliğinin uygun olduğu belirlenmiştir. Pilot çalışma yapılmış ve ölçek iki bölüme ayrılarak son haline getirilmiştir. Bu bölümlerin ayrı zamanlarda uygulanmasına karar verilmiştir. Böylece hem öğrencilerin sıkılıp yorulmalarını engellemeye hem de öğrencilerin cevaplarında diğer sorulardan yola çıkarak düşüncelerini değiştirmelerinin önüne geçilmeye çalışılmıştır. Ölçek uygulanırken öğrencilere her bir sorunun cevabını açıklayarak yazmaları gerektiği belirtilmiştir. Bu çalışmada ise sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkisini incelemeye yönelik olan bölümde yer alan dört soruya odaklanılmıştır. Bu sorular testteki orijinal madde numaraları ile Şekil 1'deki gibidir.

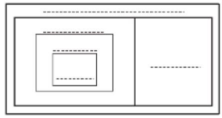
1.d) Hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayı var mıdır? Açıklayınız.

1.e) Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır? Açıklayınız.

1.f) Her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır? Açıklayınız.

7) Yandaki şemada noktalı yerlere uygun sayı kümelerini yazınız:

Doğal Sayılar, Rasyonel Sayılar, Tam Sayılar, Gerçek Sayılar, İrrasyonel Sayılar



Şekil 1. Örnek test maddeleri

1d sorusunda öğrencilerin rasyonel ve irrasyonel sayıların ayrık kümeler olduklarını bilip bilmediklerini, 1e sorusunda öğrencilerin rasyonel sayıların gerçek sayıların alt kümesi olduğu bilgilerine sahip olup olmadıklarını, aynı şekilde 1f sorusunda irrasyonel sayıların gerçek sayılarla olan alt küme ilişkisine yönelik öğrencilerin anlayışlarını öğrenmek amaçlanmıştır. Venn şeması sorusunda ise doğal sayılar, rasyonel sayılar, tam sayılar, irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümeleri arasındaki ilişkilerin görsel olarak soruda verilen şemada öğrenciler tarafından gösterilmesi istenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin bu sayı kümeleri hakkındaki kavramsal bilgileri, bu kümeler arasında kuracakları ilişkileri etkileyebileceğinden bu kavramlara yönelik tanımların sorulduğu ölçeğin bir başka bölümü ile ilgili veriler de bulgularda sunulmuştur.

Görüşmeler için ise her öğrencinin verdiği yanıta göre ona sorulacak sorular değişebileceğinden öğrencilere yönelik bir görüşme formu oluşturulmamış onun yerine görüşmede öğrencinin doldurmuş olduğu İrrasyonel Sayı Kavram Testi kullanılmıştır. Görüşmeyi milli eğitimde öğretmen olarak görev yapan bir lisansüstü öğrencisi yapmış olup görüşmenin amacı öğrencilere açıklanmıştır.

2.3 Kodlama süreci

Kavram testinden elde edilen yazılı veriler içerik analizine tabi tutulmuş ve yanıtlara göre sınıflandırma yapılmıştır. Biri lisansüstü öğrencisi diğeri öğretim üyesi olan iki matematik eğitimcisi tarafından analiz edilen bu verilerde uyum yüzdesi %84 olarak bulunmuştur. Birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri seti kodlanır ve ortaya çıkan kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılarak en az %70 düzeyinde bir güvenirlik yüzdesine ulaşmak gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 233). Yapılan görüşmelerde ise veriler uzman incelemesi öncesi katılımcıların teyidine sunulmuştur. Araştırmada elde edilen verilerin ve bunlara ilişkin araştırmacının ulaştığı sonuçların ve yorumların veri kaynakları (katılımcılar) ile teyit edilmesinde yarar vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2011, s. 268). Veriler frekans ve yüzdeler ile birlikte tablolar kullanılarak bulgularda sunulmuştur.

3. Bulgular

İrrasyonel sayı kümesinin diğer sayı kümeleri ile aralarındaki ilişkileri anlamada yaşanılan öğrenci güçlüklerini belirlemek amacıyla toplanan veriler ve sorular ışığında araştırmanın bulguları bu bölümde sunulmaktadır. Sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin anlaşılmasında bu sayı kümeleri ile ilgili kavramsal bilgilerin de önemli olabileceği düşünüldüğünden öncelikle öğrencilerin sayı kümelerinin tanımlarına yönelik yanıtları sunulmuştur.

3.1. Sayı kümelerinin tanımlarına ilişkin bulgular

Öğrencilere irrasyonel sayı, rasyonel sayı ve gerçek sayı tanımları sorulmuş ve verdikleri yanıtlar kategorilere ayrılmıştır. Tanımlamalara ilişkin yanıtlar Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Sayı kümelerinin tanımlarına ilişkin öğrenci yanıtları

	Yanıtlar	**8.sınıf f (%)**	**9.sınıf f (%)**
Rasyonel Sayı	a/b şeklinde ifade edilebilen sayılar, Kesirli şekilde gösterilebilen sayılar	34 (58,62)	31 (62)
	Kökten dışarı çıkabilen, kökten kurtulabilen sayılar	8 (13,79)	10 (20)
	Ondalık kısmı sınırlı veya devirli olan sayılar	10 (17,24)	1 (2)
	İrrasyonel olmayan sayılar	5 (8,62)	3 (6)
	Diğer Tanımlar (Yanlış)	12 (20,69)	12 (24)
İrrasyonel Sayı	a/b şeklinde yazılamayan sayılardır	21 (36,12)	12 (24)
	Rasyonel olmayan sayılardır	10 (17,24)	19 (38)
	Ondalık kısmı sonsuz ve düzensiz olan sayılardır	7 (12,04)	7 (14)
	Karekökten kurtulamayan sayılardır	10 (17,24)	12 (24)
	Gerçek olmayan sayılar	4 (6,88)	3 (6)
	Ondalık kısmı sonsuz olan sayılar	2 (3,44)	2 (4)
	Diğer Tanımlar (Yanlış)	13 (22,36)	5 (10)
Gerçek Sayı	Tüm sayılardır - Bütün sayılardır	24 (41,38)	11 (22)
	İrrasyonel ve Rasyonel sayıların birleşimidir	8 (13,79)	35 (70)
	Sayı doğrusunu dolduran sayılardır	4 (6,90)	1 (2)
	Gerçek sayılar tam sayılardır	6 (10,34)	1 (2)
	Kendisinden başkasına bölünemeyen sayılardır	3 (5,17)	-
	İrrasyonel olmayan sayılardır	2 (3,45)	1 (2)
	Diğer Tanımlar (Yanlış)	4 (6,90)	1 (2)
	Tanım vermeyenler	7 (12,07)	-

Tablo 1'de görüldüğü gibi her iki sınıf düzeyinde de öğrencilerin çoğu rasyonel sayıları a/b temsilinden yola çıkarak tanımlamaktadır. Bazı öğrenciler rasyonel sayıları "karekökten kurtulamayan sayılar" olarak tanımlarken bazıları ise ondalık temsilden yola çıkarak rasyonel sayıları tanımlamıştır.

İrrasyonel sayıyı tanımlarken 8.sınıf öğrencileri daha çok "a/b şeklinde yazılamayan sayılar" ifadesini kullanırken 9.sınıf öğrencileri ise "rasyonel olmayan sayılar" ifadesini kullanmıştır. Bazı öğrencilerin irrasyonel sayıları gerçek olmayan sayılar şeklinde ifade ettiği görülmüştür. Bazıları ise ondalık sayılarda kesir kısmı sonsuza giden sayıları irrasyonel sayı olarak tanımlamıştır.

Gerçek sayıları tanımlarken ise iki sınıf düzeyinde farklılık göze çarpmaktadır. 9.sınıf öğrencileri kümelerin birleşiminden yola çıkarken 8.sınıf öğrencileri daha çok "bütün sayılar" şeklinde tanımlama yapmıştır. Gerçek sayıların tam sayılar olduğu, asal sayılarla karıştırılabildiği ve irrasyonel olmayan sayılar şeklinde düşünülebildiği verilen cevaplardan görülmüştür.

3.2. İrrasyonel ve rasyonel sayı ilişkisine dair bulgular

Öğrencilere "*Hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayı var mıdır? Açıklayınız*" sorusu sorulmuş ve aralarındaki ayrıklık ilişkisini bilip bilmedikleri sorgulanmıştır. Rasyonel olmayan sayıların irrasyonel olduğunu belirten, ondalık kısımdan veya a/b şeklinde yazımdan yola çıkarak hem irrasyonel hem de rasyonel bir sayının olamayacağını belirten öğrenciler "doğru bir açıklamayla yoktur" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu bağlamda, Tablo 2'de bu soruya ilişkin verilen öğrenci yanıtlarının dağılımı görülmektedir.

Tablo 2."Hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayı var mıdır?" sorusuna ilişkin öğrenci yanıtlarının dağılımı

	Yanıtlar	**8.sınıf f (%)**	**9.sınıf f (%)**
Yoktur	*Doğru bir açıklamayla yoktur*	14 (%24,14)	32 (%64)
	Sadece yoktur	32 (%55,17)	7 (%14)
	Yanlış bir açıklamayla yoktur	2 (% 3,43)	3 (%6)
Yoktur Toplam		***48 (%82,74)***	***42 (%84)***
Vardır		9 (%15,52)	3 (%6)
Yanıt Yok/Kararsızım, varsa da ben bilmiyorum		1 (%1,72)	5 (%10)

Bulgulara bakıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %83'ünün, 9.sınıf öğrencilerinin de %84'ünün irrasyonel ve rasyonel sayı kümelerinin kesişimlerinin boş küme olduğu yani her iki sayı kümesine de dâhil bir eleman olamayacağı algısına sahip olduğu görülmektedir. "Yoktur" diyen öğrencilerden 5'inin rasyonel sayıların irrasyonel sayılardan ayrık olduğunu ifade ederken hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayının bulunamayacağını yanlış gerekçelendirmelerle açıkladıkları görülmüştür. Bu 5 öğrencinin gerekçelendirmeleri Tablo 3'deki gibi kategorilere ayrılabilir.

Tablo 3. "Hem irrasyonel hem rasyonel olan sayı yoktur" diyen 5 öğrencinin yanlış gerekçelendirmeleri

Gerekçeler	Frekans
Rasyonel sayıların ondalık kısmı sonlu, irrasyonel sayıların sonsuzdur	2
Rasyonel sayılar gerçek sayıdır, irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir	2
İrrasyonel sayılar sayı doğrusunda yoktur, rasyonel sayılar ise vardır	1

Bu öğrencilerden bazılarının açıklamaları şu şekildedir:

- *Bir sayının sayı doğrusunda yeri ya vardır ya yoktur. Bu nedenle sayı ya irrasyoneldir ya da rasyoneldir. İkisi birden olamaz.* (İrrasyoneller sayı doğrusunda yoktur şeklindeki öğrenci düşüncesi*)*
- *Bir sayının ondalık kısmı ya sonludur ya da sonsuza gidiyordur. Bu nedenle ikisi birden olamaz.(*Rasyonel sayıların ondalık kısmı sonludur şeklindeki öğrenci düşüncesi)
- *Hayır, yoktur. Çünkü rasyonel sayılar gerçek sayılardır, irrasyonel sayılar ise gerçek sayı değildir. (*İrrasyonel sayıların gerçek sayı olmadığı şeklindeki öğrenci düşüncesi)

Öğrencilerin açıklamaları göz önüne alındığında tanımlamalarda yaşanılan güçlüklerin ve kavramsal bilgi eksikliklerinin iki küme arasındaki ilişkileri anlamada etkili olduğu görülmektedir. Özellikle irrasyonel sayıları gerçek olmayan sayı, rasyonel sayıları gerçek sayı şeklinde düşünen öğrenciler hem rasyonel hem irrasyonel sayının bu nedenle olamayacağını belirtmiştir.

İki sınıf düzeyinde toplam 12 öğrenci hem rasyonel hem de irrasyonel sayı olan bir sayının bulunabileceğini belirttiği görülmüştür. Bu öğrencileri yanılgıya götüren sebepler Tablo 4'de gösterildiği gibi kategorileştirilmiştir.

Tablo 4. "Hem rasyonel hem irrasyonel sayı vardır" diyen öğrencilerin yanılgı sebepleri

Yanılgıya Götüren Sebepler	Frekans
Ondalık kısmı düzensiz olup da sonlu olan sayılar (3,14567 gibi)	3
İçleri tam kare olan kareköklü sayılar ($\sqrt{16}$) gibi	3
a/b şeklinde yazılan kareköklü sayılar ($\sqrt{\frac{3}{5}}$) gibi	2
π sayısı ve rasyonel yaklaşımları	2
Diğer	2

Tablo 4'de yer alan kategoriler öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalarla örneklendirilebilir. 8. sınıf düzeyinde 9 öğrenci "vardır" yanıtını vermiştir. "Bir örnek gösteremiyorum ama bir sayı vardır muhtemelen" yanıtı ve buna benzer açıklamalar yapılmıştır. 3 öğrencinin ondalık açılıma odaklandığı ve ondalık kısmı düzensiz ancak sonlu olan sayıların hem rasyonel hem de irrasyonel sayı olacağını belirttiği görülmüştür. "Diğer" kategorisinde belirtilen bir başka öğrenci olan Ö1 ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmede şu diyalog gerçekleşmiştir:

- *Ö1:* Sıfır sayısını 0/5 yazarsak rasyonel olur ama 5/0 yazarsak irrasyonel olur.
- *A:* 5/0 irrasyonel midir?
- *Ö1:* Rasyonel sayının tanımında paydanın 0 olmaması gerektiği yazılıydı. 5/0 rasyonel olamayacağına göre irrasyoneldir.
- *A:* 5/0 sıfıra mı eşittir?
- *Ö1:* Evet başka neye eşit olacak ki?

Görüldüğü gibi öğrenci rasyonel sayının tanımındaki b ifadesinin 0 olmaması gerektiğinden yola çıkarak paydası 0 olan sayıların irrasyonel olduğu ve o sayıların 0'a eşit olacağı yanılgısıyla da 0'ın hem rasyonel hem de irrasyonel olduğu yanılgısına düşmüştür.

9.sınıflarda ise "evet vardır" diyen 3 öğrencinin açıklamaları da şu şekildedir:

- *Evet vardır, mesela π sayısı hem irrasyoneldir hem de rasyonel şekilde yazılabiliyor.(*π sayısının değeri ile ilgili yanlış öğrenci düşüncesi)
- *Evet bence tam kare olan köklü ifadeler hem rasyonel hem de irrasyoneldir.* $\sqrt{16}$ *gibi.(*Kök sembolünün irrasyonel yaptığına dair öğrenci düşüncesi*)*
- *Evet kesir şeklinde yazılan irrasyonel sayılar vardır mesela* $\sqrt{\frac{3}{5}}$*. Bu sayı kök dışına çıkmaz, aynı zamanda da rasyoneldir.(*a/b ifadesinin her zaman rasyonel sayı belirttiğine dair öğrenci düşüncesi)

Öğrenciler sayıların temsiline bağlı olarak sınıflandırmada güçlükler yaşadığı düşünülebilir. Öğrenciler sayı kümelerini tanımlarken temsillere göre farklı ifadelerde bulunmuşlardı. İrrasyonel sayıları karekök temsilinden yararlanarak tanımlayan öğrencilerde karekök işaretinin irrasyonel sayı yaptığı düşüncesi oluşabilir. Ancak kökün içi tam kare olduğu zaman sayının kökten kurtulabildiğini de göz önüne alınıp irrasyonel olan sayının aynı zamanda rasyonel sayı olabileceği de düşünülmüş olabilir. Aynı şekilde rasyonel sayıyı a/b şeklinde yazılabilen sayılar olarak tanımlayan öğrencilerde bu a ve b'nin köklü olması durumunda sayının hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceği düşüncesi oluşabilir. Bazı öğrenciler bu soruda kararsız kalmışlardır. "Mutlaka bir istisna vardır ama ben bilmiyorum." düşüncesi yaygındır.

İki sınıf düzeyi karşılaştırıldığında 8.sınıfa giden öğrencilerin sadece %24'ünün doğru bir açıklamayla 'yoktur' dedikleri 9.sınıfa giden öğrencilerde ise bu oranın %64 olduğu görülmektedir.

3.3. Rasyonel sayı ve gerçek sayı ilişkisine dair bulgular

Rasyonel sayı ve gerçek sayılar arasındaki alt küme ilişkisini bilip bilmediklerini anlayabilmek amacıyla öğrencilere "*Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır? Açıklayınız*" sorusu sorulmuştur. "Rasyonel sayılar gerçek sayıların alt kümesidir", "gerçek sayılar rasyonel sayıları kapsar", "gerçek sayılar irrasyonel ve rasyonel sayıların birleşimidir" şeklindeki cevaplar "doğru bir açıklamayla, evet" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soruya ilişkin bulgular Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır?" sorusuna ilişkin öğrenci yanıtlarının dağılımı

Yanıtlar		8.sınıf f (%)	9.sınıf f (%)
Evet	*Doğru bir açıklamayla evet diyenler*	26 (%44,82)	43 (%86)
	Sadece evet gerçek sayıdır diyenler	20 (%34,48)	4 (%8)
	Yanlış bir açıklamayla evet diyenler	2 (% 3,43)	1 (% 2)
Evet Toplam		***48 (%82,74)***	***48 (%96)***
Hayır, bazıları gerçektir		10 (%17,24)	2 (% 4)

Tablo 5'e bakıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %83'ünün, 9.sınıf öğrencilerinin ise %96'sının rasyonel sayıların aynı zamanda gerçek sayı olduğunu düşündüğü söylenebilir. Ancak iki sınıf düzeyinden toplamda 3 öğrenci 'evet' yanıtını vermelerine rağmen yanlış açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu 3 öğrenci de rasyonel sayıları gerçek sayılarla eş değer görmüş veya gerçek sayıların rasyonel sayıların içinde olduğunu belirtmişlerdir.

İki sınıf düzeyinde 'hayır' diyen 12 öğrenci mevcuttur. Bu öğrencilerin yanıtları Tablo 6'da kategorilendirilmiştir.

Tablo 6. "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı değildir" diyen öğrencilerin yanıtları

Yanıtlar	Frekans
Gerçek sayı olmayan istisnalar muhtemelen vardır	3
Bir rasyonel sayının gerçek sayı olması için bazı özelliklere sahip olması gerekir	2
Gerçek sayıların içinde irrasyoneller de vardır. Hepsi rasyonel değildir (Tersten Anlayanlar)	4
Diğer	3

Görüldüğü gibi 3 öğrenci "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı değildir, aralarında gerçek olmayanlar da olabilir. Örnek gösteremiyorum " yanıtına benzer yanıtlar vermiştir. Soruyu "Gerçek sayıların tamamı rasyonel sayı mıdır?" şeklinde anlayıp yanlış cevap veren 4 öğrenci bulunmaktadır. Ayrıca 1 öğrenci bir rasyonel sayının gerçek sayı olması için tam sayı olması gerektiğini belirtirken bir başkası a/b şeklinde yazılması gerektiğini belirtmiştir.

"Diğer" kategorisinde yer alan görüşme yapılan 8.sınıf öğrencilerinden *Ö2* her rasyonel sayının gerçek sayı olmayacağını belirtmiştir. Bir örnek istendiğinde ise 23/17 sayısını göstermiştir (Bu sayı ölçekte yer alan sayılardan biridir). "23/17 rasyonel bir sayıdır çünkü kesirli yazılmıştır. Ancak 23'ü 17'ye böldüğümde sayının sonu gelmiyor ve ondalık kısmı devretmeden ilerliyor. Bu da irrasyonelliğin bir göstergesidir. Bu nedenle bu sayı gerçek olamaz." yanıtını vermiştir.

İki sınıf düzeyinde de benzer yanılgılara sahip öğrenciler mevcuttur. *Ö2* ile yapılan görüşmeden de anlaşılacağı gibi öğrencilerin rasyonel sayının sonlu veya devirli ondalık şekilde yazılamadığı durumlar olabileceğini ve öyle bir durumda gerçek sayı olmayacağını düşünebildikleri görülmüştür.

3.4. İrrasyonel Sayı-Gerçek Sayı İlişkisine Dair Bulgular

Öğrencilere "Her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır?" sorusu sorularak irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar arasındaki alt küme ilişkisi ile ilgili farkındalıklarının ortaya konulması amaçlanmıştır. "İrrasyonel sayılar gerçek sayıların alt kümesidir", "gerçek sayılar irrasyonel sayıları kapsar", "gerçek sayılar irrasyonel ve rasyonel sayıların birleşimidir" şeklindeki cevaplar "doğru bir açıklamayla, evet" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bir öğrenci de "İrrasyonel sayıların tamamı sayı doğrusu üzerindedir. Bu nedenle gerçek sayılardır" yanıtı vermiş bu açıklama da doğru kabul edilmiştir. Bu soruya ilişkin öğrenci cevaplarının dağılımı Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. "Her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır?" sorusuna ilişkin öğrenci yanıtlarının dağılımı

Yanıtlar		8.sınıf f (%)	9.sınıf f (%)
Evet	*Doğru bir açıklamayla evet diyenler*	20(%33,48)	43 (%86)
	Sadece evet gerçek sayıdır diyenler	15 (%25,86)	2 (%4)
Evet Toplam		***35 (%60,34)***	***45 (%90)***
Kararsız/Olabilir		-	1 (% 2)
Hayır		23 (%39,65)	4 (%8)

Tablo incelendiğinde 8.sınıflarda rasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisinde doğru cevap verenlerin oranının %83 iken irrasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisinde doğru cevap verenlerin oranının %60'a düştüğü görülmektedir. İki sınıf düzeyi karşılaştırıldığında ise 9.sınıf öğrencilerinin 8.sınıf öğrencilere göre daha yüksek oranda doğru cevap verdikleri görülmektedir. 9.sınıf öğrencilerde 'hayır' diyenler az olmasına karşın 8.sınıf öğrencilerin %40'ı "Hayır, her irrasyonel sayı gerçek sayı değildir." yanıtını vermişlerdir. Bu soruya "Hayır" yanıtını veren toplamda 27 öğrencinin açıklamaları Tablo 8'de verildiği gibi kategorileştirilebilir.

Tablo 8. "Her irrasyonel sayı gerçek sayı değildir" diyen öğrencilerin yanıtlarının dağılımı

Yanıtlar	Frekans
İrrasyonel Sayılar = Gerçek Olmayan Sayı	7
Ondalık kısmı sonsuz olan sayılar gerçek sayı değildir	4
Gerçek sayılar negatif olamaz, irrasyonellerde negatif de vardır	2
π sayısı irrasyonel ancak gerçek değil	2
Gerçek sayıların içinde rasyoneller de vardır. Hepsi irrasyonel değildir (Tersten Anlayanlar)	2
Diğer Açıklamalar	2
Açıklama Yapmayanlar	4

Öğrencilerin verdikleri yazılı yanıtlardan bazıları şunlardır:

• *Gerçek sayılar, rasyonel sayı demektir. İrrasyonel sayı da rasyonel olmayan sayı demek olduğuna göre irrasyonel sayıların hiçbiri gerçek değildir.(*Gerçek sayı=Rasyonel sayı şeklindeki öğrenci düşüncesi)

• *Gerçek sayıların bazıları irrasyoneldir. Hepsi değildir.* (Soruyu tersten anlayan öğrenciler)

• *Ondalık kısmında sonu belli olmayan sayılar gerçek sayı olamazlar.(*Sonsuz ondalık açılıma sahip sayıların gerçek sayı olamayacağı şeklindeki öğrenci düşüncesi*)*

• *Bazı irrasyonel sayılar sayı doğrusunda gösterilmezler, bu nedenle gerçek sayı değillerdir.(*Sayı doğrusunda gösterilemeyen irrasyonel sayıların olduğu şeklindeki öğrenci düşüncesi*)*

• *Gerçek sayılar kesirli yazılmalıdır. Ancak irrasyonel sayılar kesirli yazılamazlar. (*Gerçek sayıların kesirli olması gerektiği şeklindeki öğrenci düşüncesi*)*

• *Gerçek sayılarda negatif sayı olmaz, ama irrasyonel sayıların negatifleri de vardır.(*Gerçek sayıların pozitif olması gerektiği şeklindeki öğrenci düşüncesi*)*

Yanıtların her biri bir yanılgıya işaret etmektedir. Gerçek sayıların rasyonel sayılarla veya pozitif sayılarla aynı olduğu yanılgılarına sahip öğrenciler bulunmaktadır. Öğrencilerin gerçek sayı tanımlamalarında da benzer ifadeler bulunmaktadır. Gerçek sayıları tam sayı ve irrasyonel sayıyı gerçek olmayan sayı şeklinde tanımlayan öğrenciler düşünüldüğünde bu sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin anlaşılmasında güçlüklerin yaşanması doğal karşılanabilir. Bir sayının ondalık kısmıyla ilgili de yanılgılar söz konusudur. Sayının ondalık kısmının sonsuz olması sayının gerçek bir sayı olmadığı algısına götürmüş olabilir. Ayrıca ondalık kısmı sonsuz olan sayıların sayı doğrusunda tam bir karşılığının olmadığı bu nedenle gerçek sayı olmadığı düşüncesinde olan öğrenci de mevcuttur.

Görüşme yapılan 9.sınıf öğrencilerinden *Ö3* gerçek sayıların tanımını hatırlayamadığını ama π sayısının irrasyonel sayı olduğu halde gerçek sayı olmadığını düşündüğünü söylemiştir. *Ö3'e* gerçek sayı tanımı sorulduğunda iki kümenin birleşimine gerçek sayı dendiğini belirtmiş ve π sayısının irrasyonel olduğunu ifade etmiştir. Verdiği yanıtla çelişkinin farkına varan *Ö3* "Emin olmamakla birlikte π sayısının da gerçek sayı olduğunu düşünüyorum.' şeklinde fikrini değiştirmiştir.

3.5. Sayı Kümelerinin Venn Şemasında Yerleştirilmesine İlişkin Bulgular

Bu çalışmada öğrencilere Venn şeması verilmiş öğrencilerden sayı kümelerini uygun boşluklara yerleştirmeleri istenmiştir. Özellikle irrasyonel sayı kümesini doğru yerleştirip yerleştirmedikleri incelenmiştir. İrrasyonel sayı kümesini doğru yerleştiren öğrencilerden gerçek sayı, rasyonel sayı, tam sayı ve doğal sayı kümelerinin yerlerini hatalı belirten öğrencilerin sayıları da hatalı küme sayısına göre belirtilmiştir. Bu soruya ilişkin bulgular Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9. Venn şemasına sayı kümelerini yerleştirmede yapılan hata sayısına göre öğrenci dağılımı

Yanıtlar		**8.Sınıf f (%)**	**9.Sınıf f (%)**
Tamamen Doğru		37 (%63,79)	49 (%98)
İrrasyonel Sayı Kümesi Doğru, Diğerlerinde Hatalılar	2 küme hatalı	4 (%6,90)	-
	3 küme hatalı	2 (%3,45)	1 (%2)
	4 küme hatalı	7 (%12,07)	-
İrrasyonel Sayı Kümesi Doğru, Diğerlerinde Hatalı Olanlar Toplamı		13 (%22,41)	1 (%2)
İrrasyonel Sayı Kümesi Yanlış		8 (%13,80)	-

Tabloya bakıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %64’ünün, 9.sınıf öğrencilerinin ise 1’i hariç tamamının sayı kümelerini Venn şemasına doğru yerleştirdiği görülmektedir. 8.sınıf öğrencilerinin %22’si irrasyonel sayı kümesini doğru yerleştirmiştir ancakdiğer sayı kümelerini yerleştirmede hatalar yapmışlardır. Görüşme yapılan 8.sınıf öğrencilerinden *Ö2* rasyonel sayı ve tam sayı arasındaki farkı anlayamadığını görüşme sırasında fark etmiş ve Venn şemasını yanlış tamamlamıştır. *Ö1* de rasyonel sayıları tam sayıların alt kümesi olarak belirtmiştir. “Tam sayı olup da rasyonel olmayan bir sayı örneği verir misin?” sorusuna ise “$-\sqrt{3}$ tam sayıdır çünkü negatif sayılar tam sayıdır. Ama rasyonel sayı değildir çünkü kökten çıkmaz. İrrasyonel sayıdır.” yanıtını vermiştir.

9.sınıf öğrencilerinde bundan önceki sorularda yer alan gerçek sayı-irrasyonel sayı, gerçek sayı-rasyonel sayı ve rasyonel sayı-irrasyonel sayı ilişkilerinde güçlük çekenlerin sayısının daha fazla olduğu dikkat çekmektedir. Ancak bu güçlük çeken öğrencilerin durumu Venn şeması sorusuna yansımamıştır. Venn şemasının ders kitaplarında da yer alması öğrenciyi mantığını incelemeden ezberlemeye yöneltmiş olabilir.

Öğrencilerin tüm sayı kümelerinin ilişkisini göz önüne alarak tamamladıkları Venn şeması görevine bakıldığında iki sınıf düzeyi arasında ciddi düzeyde fark olduğu görülmektedir. 8.sınıfların %64’ü Venn şemasını doğru bir şekilde tamamlarken 9.sınıflarda bu oran %98’dir. Tüm bunlar göz önüne alındığında sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkisini kavramada 9.sınıfların 8.sınıflara göre daha iyi olduğu ve daha az öğrencinin yanılgılara sahip olduğu söylenebilir. Bu farklılığın önemli bir nedeni olarak 9.sınıflarda “Kümeler” konusunun “Gerçek Sayılar” konusundan önce işlenmiş olduğu düşünülebilir. Örneklemdeki 8.sınıf öğrencileri ise “Kümeler” konusunu 2009 öğretim programına göre 6.sınıf düzeyinde görmüşlerdir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada irrasyonel sayı-rasyonel sayı ilişkisi ve gerçek sayıların diğer sayı kümeleriyle olan ilişkilerine yönelik öğrenci güçlükleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Hem 8. hem de 9. sınıf öğrencilerinin büyük çoğunluğu hem rasyonel hem de irrasyonel bir sayının olmadığı düşüncesinde olduğu görülmüştür. Ancak doğru yanıtına açıklama getirebilen öğrenciler 8.sınıfta düşük bir oranda kalmıştır. Öğrencilerin vermiş oldukları hatalı yanıtlara ve bunların nedenlerine baktığımızda çeşitli yanılgılar göze çarpmaktadır. Adıgüzel (2013) yapmış olduğu çalışmada 8.sınıf öğrencilerinde ve öğretmen adaylarında irrasyonel sayıları rasyonel sayıların alt kümesi olarak düşünenlerin olduğu gibi bazılarının rasyonel sayıları irrasyonel sayıların alt kümesi olarak düşündüklerini ortaya koymuştur. Çalışma, öğrencilerin ve matematik öğretmen adaylarının birçoğunun irrasyonel sayılarla ilgili bilgi eksikliklerinin olduğunu göstermiştir. Ayrıca öğrencilerin yarısı verilen sayıların irrasyonel olup olmadığını doğru belirlemiş ancak irrasyonel olan sayının rasyonel olmadığını bu öğrencilerden yaklaşık yarısı ifade etmiştir. Bu çalışmada bu iki kümeyi birbirlerinin alt kümesi şeklinde ifade eden bir öğrenci yanıtına rastlanmasa da bazı sayıların her iki kümeye de ait olduğunu ifade eden öğrenciler olmuştur. Arbour (2012) çalışmasında ise verilen sayıları hiçbir öğrenci hem rasyonel hem irrasyonel şeklinde sınıflamazken “İki kümenin kesişimi boş küme midir?” sorusuna katılımcıların yarısının doğru cevabı verebildikleri görülmüştür.

π sayısının değeri ile ilgili öğrencilerde önemli sayılabilecek bir yanılgının olduğu söylenebilir. “Hem rasyonel hem irrasyonel olan sayı var mıdır?” sorusuna “Evet vardır, mesela π sayısı hem irrasyoneldir hem de rasyonel şekilde yazılabiliyor.” şeklinde cevap veren öğrenciler bulunmaktadır. Dolayısıyla, π sayısının rasyonel yaklaşımlarına (22/7 veya 3,14 gibi) eşit olduğu düşüncesinin var olabildiği ve bu nedenle bu sayının hem rasyonel hem de irrasyonel olarak düşünülebildiği görülmüştür. Güven ve arkadaşlarının (2011) öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada ve Arbour’un (2012) üniversite öğrencileri ile ilgili yaptığı çalışmalarında da benzer bulgulara rastlanmıştır. π sayısının irrasyonelliği konusunda yanılgıların olduğu 3,14 rasyonel yaklaşımının sık kullanılmasının kafaları karıştırdığı ifade edilmiştir. Bu çalışmalarda π sayısının 3,14 yazılabildiği için rasyonel olduğunu iddia eden katılımcılar olduğu gibi Adıgüzel (2013) çalışmasında 22/7 sayısının π sayısına eşit olduğunu düşünerek 22/7’yi irrasyonel sayı olarak gören öğrencilerin olduğunu ifade etmiştir. Görüldüğü gibi ortaokul veya lise öğrencilerinin yanı sıra üniversite öğrencileri dahi π sayısının rasyonel yaklaşımından yola çıkarak yanılgılara sahip olabilmektedir. Köklü tam kare sayılar da aynı π sayısı gibi hem rasyonel hem de irrasyonel olduğu düşünülebilen sayılardır. Çalışmada öğrencilerin içleri tam kare olan köklü sayıları hem irrasyonel hem de rasyonel sayı olarak düşünebildiği ortaya konmuştur. Arbour (2012) tam kare olan köklü sayıların, öğrencilerde hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayı imajı yaratabildiğini belirtmiştir. Çünkü ona göre öğrenciler köklü temsili irrasyonel sayıların belirteci olarak görmektedir. Bu çalışmadaki $\sqrt{\frac{3}{5}}$ sayısının a/b şeklinde ifade edilebildiği için rasyonel ancak köklü olduğu için aynı zamanda irrasyonel olduğu düşüncesine sahip öğrenci de göz önüne alındığında Arbour’un (2012) ifadesi desteklenmektedir. Rasyonel sayı-irrasyonel sayı ilişkisinde yaşanan güçlüklerin rasyonel sayı kavramındaki bilgi eksikliğinden de kaynaklanabildiği düşünülebilir. Özellikle sıfırın kesirli biçimde yazılımında yapılan hatalar, öğrencilerde onun hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceği algısı yaratabilmektedir. Rasyonel sayının tanımda yer alan a/b ifadesindeki b'nin sıfır olmama şartı yanlış yorumlanabilmektedir. 5/0 gibi bir ifadenin rasyonel sayı olmadığı bilincinde olan öğrenciler rasyonel olmayan sayıların irrasyonel olacağı düşüncesinden hareketle sayıyı irrasyonel olarak sınıflama yoluna gidebilmektedir.

9.sınıfların tamamına yakını doğru cevaplamasına karşın 8.sınıflarda azımsanamayacak oranda yanlış yapan öğrencilerin olduğu gerçek sayı kümesinin diğer sayı kümeleriyle olan ilişkisi konusunda da çeşitli yanılgılar söz konusudur. İrrasyonel olmayan sayılara gerçek sayı denildiği, ondalık kısmı sonsuza giden bir sayının gerçek sayı olamayacağı, gerçek sayıların kesirli yazılabilmesi gerektiği gibi düşünceler bazı yanılgılardandır. Fischbein ve arkadaşları (1995) yapmış oldukları çalışmada 9.sınıf ve 10.sınıfların çoğunun 'gerçek sayı' kavramı ile ilgili bilgisizliklerinin olduğunu belirtmiştir. Birçok öğrencinin 34,2727… gibi verilen bazı rasyonel sayıların gerçek sayı olmadığını belirttikleri görülmüştür. Verilen bir rasyonel sayıya rasyonel sayı diyenlerin oranı ile gerçek sayı diyenlerin oranları arasında uyuşmazlıklar olduğu görülmüştür. Aynı şekilde verilen irrasyonel sayıya irrasyonel sayı diyenler ile gerçek sayı diyenlerin oranları arasında da uyuşmazlıkların olduğu görülmüştür. π ve 3√8 sayılarına irrasyonel sayı diyen fakat gerçek sayı olmadığını düşünen 9.sınıf öğrencileri ve bunların yanı sıra öğretmen adaylarının bulunduğu ifade edilmiştir. Güven ve arkadaşları (2011) çalışmasında da 1.sınıf öğretmen adaylarında 2,077… ve 3,14 sayılarına rasyonel sayı diyenlerin oranının gerçek sayı diyenlerin oranından fazla olduğu görülmüştür. Arbour (2012) çalışmasında ise irrasyonel sayılarının tamamının gerçek sayı olup olmadığı sorulmuş katılımcıların yaklaşık yarısının doğru cevabı verebildiği; 0,123456… gibi ondalık sayıları ve π sayısını irrasyonel olarak gören ancak gerçek sayı olmadığını düşünen öğrencilerin çoğunlukta olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada görüşme yapılan öğrencilerden Ö2, 23/17 sayısının rasyonelliği hatta gerçekliği konusunda kararsızlığa düşmüştür. 23/17 =1,35294… sayısının a/b şeklinde yazılabildiği için rasyonel olduğunu ancak ondalık açılımının düzensiz devam ettiğini ve sonu gelmediğini bu nedenle de irrasyonel gibi olduğunu düşünmüştür. Bu düşünce öğrenciyi bir rasyonel sayının ondalık açılımı irrasyonelmiş gibi devam ediyorsa bu sayının gerçek sayı olamayacağı yanılgısına götürmüştür. Öğrenci sayının rasyonel olduğu halde gerçek olmadığı düşüncesinde olduğunu belirtmiştir. Kara ve Delice'nin (2012) yapmış oldukları çalışmada da 23/17 sayısını 9.sınıf öğrencilerinin yarıdan fazlasının irrasyonel olarak belirttikleri görülmüştür. Zazkis ve Sirotic (2004) ve Zazkis (2005) çalışmalarında 53/83 sayısı için benzer yanılgılar ortaya koymuşlardır. Çalışmalarında öğretmen adaylarının dahi sayının ondalık kısmına bakıp irrasyonelliğe karar verebildikleri görülmüştür. Voskoglou ve Kosyvas (2011) çalışmalarında 144/233 sayısının 232 basamağa sahip olduğunu öğretmenlerin sonsuz ondalık basamağa sahipmiş gibi görünen bu tür sayılar konusunda bilgi sahibi olmalarını ve bunları öğrencilerine aktarmaları gerektiğini belirtmişlerdir.

Çalışmada, "Bazı irrasyonel sayılar sayı doğrusunda gösterilmezler, bu nedenle gerçek sayı değillerdir." yanılgısına sahip öğrencilerin olduğu görülmüştür. Benzer şekilde

Sirotic ve Zazkis (2007b) çalışmalarında da irrasyonel sayıların sayı doğrusu üzerinde yerinin bulunmadığını belirten öğretmen adaylarının olduğunu ortaya koymuşlardı. Peled ve Hershkovitz (1999) yapmış oldukları çalışmada da 2. ve 3. sınıfta okuyan öğretmenlik sertifikası alan üniversite öğrencilerinin bir kısmının $\sqrt{5}$, π gibi irrasyonel sayıların reel sayı ekseninde bulunmadığını düşündükleri bulgusuna ulaşmışlardır. Kara ve Delice (2012) çalışması da 9.sınıf öğrencilerinin ve lise öğretmen adaylarının yarıya yakınının $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusunda yerinin bulunamayacağını belirttiklerini göstermektedir. Görüldüğü gibi irrasyonel sayıların reel sayı ekseni üzerindeki yeri ile ilgili öğrencilerde bilgi eksiklikleri veya yanılgılar bulunabilmektedir.

Sayı kümeleri arasındaki ilişkiye genel olarak bakıldığında Venn şeması ile gösterimde 9.sınıfların tamamına yakını hatasız bir yerleştirme yapmışken, 8.sınıflarda %36 gibi bir hata yapma oranı vardır. Bunun nedeni olarak kümeler konusunun ortaokulda 6.sınıfta işlenmesi 9.sınıflarda ise gerçek sayılardan önce işlenmesi gösterilebilir. Kara ve Delice (2012) çalışmalarında Venn şemasıyla sayı kümelerinin ilişkisini göstermelerini öğrencilerden istemiş ve lise düzeyinde öğrencilerin %87'sinin yanlış çizim yaptığını görmüşlerdir. Bu araştırmada ise öğrencilere çizim yaptırılmamasına karşın Venn şemasını doldurmadaki doğruluk oranı oldukça yüksektir. Adıgüzel (2013) çalışmasındaki 8.sınıf öğrencilerinin çoğunda rasyonel sayı, irrasyonel sayı, reel sayı ve tamsayıların hangi sayılar olduğu konusunda eksikliklerin olduğunu ifade etmiş ancak sayı kümeleri arasındaki ilişki ile ilgili sorulardaki başarılarının %50' ye yakın olduğunu belirtmiştir. Bu durumdan kümeler arası ilişkilerin Venn şeması ile gösterilmiş olmasının etkili olabileceği yorumunda bulunmuşlardır. Sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin daha iyi anlaşılması için küme kavramının da öğrencide oluşması gerektiği söylenebilir. Ancak yeni matematik öğretim programına göre kümeler konusu ortaokuldan tamamen kaldırılmıştır. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde tamamının Venn şemasından yararlanarak sayı kümesindeki ilişkileri gösterdikleri anlaşılmıştır. Bu göz önüne alındığında kümeler konusunun kaldırılmasının öğretim sürecini de etkileyeceği söylenebilir.

5. Öneriler

Araştırmanın bulgularından yola çıkılarak şu önerilerde bulunulabilir:

İrrasyonel sayı ve gerçek sayı kavramı verilmeden önce rasyonel sayı kavramıyla ilgili öğrencilerin ön bilgileri kontrol edilmelidir. Çünkü rasyonel sayı kavramıyla ilgili yanılgılar irrasyonel sayılara da yansımaktadır.

Rasyonel sayının tanımı a/b temsilinden yararlanılarak verilse de ondalık temsil ve a/b temsili arasındaki bağlantıya önem verilmelidir. Her a/b rasyonel sayısının bir ondalık açılımı olduğu ve her ondalık açılımla ifade edilmiş rasyonel sayının a/b şeklinde ifade edilebileceği örneklerle gösterilebilir. Böylece öğrenci a'yı b'ye bölmeden de sayının ondalık açılımının ya devirli olacağını ya da sonlu olacağını düşünebilir. Aynı şekilde devirli bir sayı verildiğinde de onun a/b şekline yazılabilen bir rasyonel sayı olduğunu kavrayabilir. Bu dikkat edilmesi gereken bağlantı irrasyonel sayı kavramıyla ilgili yanılgıları da azaltacaktır.

Önce ondalık temsilden yararlanılarak irrasyonel sayının verilmesi daha sonra sayı kümelerinin birleşiminden gerçek sayıların verilmesi yapılabilecek bir öğretim sırasıdır. Ama önce sayı doğrusu ve gerçek sayıların verilmesi daha sonra bu doğru üzerinde rasyonel olmayan sayıların da olduğu hissi yaratılarak irrasyonel sayılara geçiş yapılması da başka bir öğretim yöntemi olarak görülebilir. Gerçek sayı ile diğer sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin hangi yöntemle daha iyi anlaşılabileceği araştırılabilir.

Gerçek sayı kavramı ve tanımı üzerinde durulmalıdır. a/0 ifadesinin bir ondalık açılımı olamayacağından yola çıkılarak ne rasyonel ne irrasyonel sayı olduğu yani gerçek sayı olmadığı vurgulanmalıdır. Çünkü a/0 şeklindeki bir ifadeyi irrasyonel sayı olarak düşünen öğrenciler vardır.

Sayı kümelerinin ilişkileri gösterilirken Venn şemasının önemi büyüktür. Venn şemasını daha doğru çizebilen 9.sınıfların sayı kümelerinin ilişkisine yönelik diğer sorularda da bu şemayı düşünerek doğru yanıtlar vermeleri Venn şemasının yararlı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle öğretmenler görsel olarak Venn şemasını kullanması önerilebilir. Ayrıca kümeler konusunun ortaokuldan kaldırılmasının sayı kümelerinin anlaşılmasını da zorlaştıracağı düşünülebilir. "Kümeler" konusunun sayı kümeleri arasındaki ilişkinin anlaşılırlığı üzerine etkisi araştırılabilir.

Ondalık bir sayının ondalık kısmı kaç basamak olursa olsun bir yerde bitiyorsa (0 olarak devrediyorsa) rasyonel sayı olacağı hatırlatılmalıdır. Çünkü bu tür yanılgılar görülebilmektedir. Hatta sayının yüzlerce basamak sonra devretmeye başlayabileceği de belirtilmelidir. 144/233 sayısı 232 basamak sonra devretmeye başlamaktadır.

Learning Difficulties about the Relationship between Irrational Number Set with Rational or Real Number Sets

Extended Abstract

The concept of irrational number is one of the main concepts in mathematics. However it is a concept which may be difficult to understand by students, rather it may be lead to learning difficulties and misconceptions. This concept is inherently difficult, but it is essential to understand the irrational numbers for the extension and reconstruction of the concept of number from the system of rational numbers to the system of real numbers (Sirotic & Zazkis, 2007a). The mathematical definition of irrational numbers can be made by using Dedekind cut and Cauchy series. But, a definition can be made for the students as in the following; "A rational number is a number that can be represented as a/b, where a is an integer and b is a nonzero integer, and an irrational number is a number that cannot be represented as a ration of integers.'' The other equivalent definition for an irrational number refers to infinite nonrepeating decimal representation. That is, "a number whose decimal is nonrecurring and continue to infinite (Zazkis, 2005).

The terms of "mistake" and "misconception" have been used to define the learning difficulties in the learning process (Bingölbali & Özmantar, 2009). The wrong answers related to practices may be interpreted as mistakes. Mistakes may be made by both experts and novices because of carelessness. However, misconception is a form of perception that leads an individual to make mistakes systematically (Zembat, 2008). In mathematics, one of the concepts that students have difficulties is the concept of irrational numbers. In literature many researchers indicated that students studying different grade levels had difficulties with this concept (Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995; Sirotic & Zazkis, 2007b; Zazkis & Sirotic, 2004).

The aim of this study is to investigate eighth-grade and ninth-grade students' difficulties about the relation between irrational numbers and other number sets. This study, which is some part of a larger thesis, is a qualitative descriptive research. Learning difficulties on this subject at two grade levels were compared. For this purpose, data collection tool which consists of two sections has been developed. Developed data collection instrument was applied to 58 students in grade 8 and 50 students in grade 9. Semi-structured interviews with ten students who were selected from different levels with the maximum diversity sampling were conducted. Content analysis was used.

According to findings, it was found that students had difficulties in understanding the relationship between real number set and other number sets. There have been some misconceptions such as 'all of the irrational numbers are not real numbers' and 'a number can be both rational and irrational'. Results revealed that there is an important misconception about π. Some students thought that π is both rational and irrational. Güven, Çekmez and Karataş (2011) and Arbour (2012) reached similar results and stated that the

frequent use of π as 3,14 confuses the student. In addition, while almost all of 9th grade students answered the questions about the relationship between real numbers and the other number sets correctly, it was seen that 8th grade students had various misconceptions on this subject such as “numbers which are not irrational are called real numbers” or “real numbers must be written in fractions”. Fischbein and his colleagues (1995) stated in their study that the majority of 9th and 10th grade students are lack of knowledge about the concept of ‘real numbers’.

It was observed that some students answered the questions correctly but the explanations for the answer wrong. For example, although a large majority of both 8th grade and 9th grade students confirmed that there is no number which is both rational and irrational, the ratio of 8th grade students who were able to make a correct explanation for that is too low. Similarly, Adıgüzel (2013) mentioned some students who thought that rational numbers set is a subset of the irrational numbers or vice versa. In addition, the root of perfect square numbers was considered as both rational and irrational by some students. According to Arbour (2012), students consider the representation of root as a signal for irrational numbers.

It was seen that most of the students identified numbers like 34,2727… not to be real numbers. Besides, there was an incompatibility between the ratio of students who defined the given number as a rational number, and the ratio of students who defined the same number as a real number. Similar incompatibility was seen for an irrational number. Güven, Çekmez and Karataş (2011) reached similar results for prospective teachers. They found that the ratio of the prospective teachers who defined 2,077… and 3,14 as rational numbers, was higher than the ratio of the prospective teachers who considered these numbers as real. According to findings, there were students who considered that “some irrational numbers cannot be represented on number line so they are not real numbers”. Similarly, Sirotic and Zazkis (2007b), who conducted a study with prospective teachers, reached similar results. Because, some prospective teachers stated that irrational numbers have no place in number line.

Consequently, based on these results, it may be put forward that the main difficulties about the relationship between rational and irrational numbers result from lack of knowledge about rational numbers. So before teaching irrational and real numbers, students’ knowledge about rational numbers should be reviewed carefully.

Kaynaklar/References

Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları.* (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Altun, M. (1998). *Matematik öğretimi* (6. baskı). Bursa: Alfa Yayın.

Arbour, D. (2012). *Students’ understanding of real, rational and irrational numbers.* (Master’s thesis). Concordia University, Montreal, Quebec. Retrieved from http://deu.summon.serialssolutions.com

Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F. (2009). Matematiksel kavram yanılgıları: sebepleri ve çözüm arayışları. Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F. (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (s. 1-30). Ankara: Pegem Akademi.

Courant, R. & Robbins, H. (1941/1978). *What is mathematics?*. Oxford: Oxford University Press.

Erdoğan, A. (2009). Matematiksel nesneler, sorunlu şeyler!. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 3*(1), 156-173.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, C. (1995). The concept of irrationals number in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29,* 29–44. doi: 10.1007/BF01273899

Güven, B., Çekmez, E., & Karataş, İ. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *21*(5), 401-416. doi:10.1080/10511970903256928

Kara, F. ve Delice, A. (2012). *Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri.* X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013a). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Yayınları.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 30,* 39–46. doi:10.1080/002073999288094

Sertöz, S. (2002). *Matematiğin aydınlık dünyası*. Ankara: Tübitak Yayınları.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 49-76. doi: 10.1007/s10649-006-9041-5

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the numberline–where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477-488. doi:10.1080/00207390601151828

Sönmez, V. ve Alacapınar, F. G. (2011). *Örneklendirilmiş bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Tatar, E., Okur, M. ve Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi,16*(2), 507-516.

Voskoglou, M. G., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quadernidi Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche), 21*, 127-141.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36(2-3),* 207-217. doi:10.1080/00207390412331316951

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of ırrational numbers: focusing on representation. *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education, 4,* 497–50.

Zembat, İ. Ö. (2008). Kavram yanılgısı nedir?. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 1-8) Ankara: PegemA Yayıncılık.

Kaynak Gösterme

Ercire, Y. E., Narlı, S. ve Aksoy, E. (2016). İrrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik öğrenme güçlükleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7*(2), 417-439.

Citation Information

Ercire, Y. E., Narlı, S., & Aksoy, E. (2016). Learning difficulties about the relationship between irrational number set with rational or real number sets. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(2), 417-439.