

Kitap İncelemesi

Understanding Geometry for a Changing World: Seventy First Yearbook

National Council of Teachers of Mathematics,
Editors: Tim Craine, Rheta Rubenstein

Şeyda Birni¹ ve Zekeriya Karadağ²

Bu çalışmada “Değişen Dünya İçin Geometriyi Anlamak: NCTM’in 71. Yıl Kitabı” (Understanding Geometry for a Changing World: NCTM’s 71st Yearbook) isimli kitabın incelemesi yapılmıştır. Kitap üç ana bölümden oluşmaktadır. “Geometrik Vizyonu Geliştirmek” isimli ilk bölüm, altı makaleden, “Geometri Öğrenme” isimli ikinci bölüm, beş makaleden ve “Anlamak İçin Geometri Öğretme” isimli son bölüm ise on iki makaleden oluşmaktadır. Çalışmanın amacı her bir makalenin ana fikrini ve değindiği önemli noktaları ortaya koymak olduğundan, içerik analizi yöntemi kullanılmıştır.

DOI: 10.16949/turcomat.59381

Kitabın önsöz kısmında, editörlerden Tim Craine, NCTM’in 2009 yılına kadar yayınladığı kitaplardan sadece üç tanesinin başlığını geometri ile ilgili olduğunu belirtmiştir. Bu kitaplardan ilkinin, NCTM’in 5. yıl kitabı olan “Geometri Öğretimi” isimli kitap olduğunu ve Öklid geometrisi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. İkinci kitap olan ve 36. yılda yayımlanan “Matematik Müfredatındaki Geometri” adlı çalışmada, geometri müfredatına odaklanıldığını, fakat öğrencilerin gerçekte ne düşündükleri ve geometriyi nasıl anladıkları hakkında herhangi bir tartışmanın olmadığını dile getirmiştir. Üçüncü kitap olan ve 49. yılda yayımlanan “Geometri Öğrenme ve Öğretme” adlı kitapta ise, öncekilerin aksine aksiyomatik yapıya çok az odaklanıldığını, kitapta ilk ve ortaokul seviyelerine uygun etkinliklere yer verildiğini ve geometrinin matematiğin diğer branşları ile ilişkisinin vurgulandığını ifade etmiştir. Son yirmi yılda birçok şeyin değiştiğini, NCTM’in standartlarının, bütün matematik eğitimini etkilemesi ile geometri eğitiminde de önemli değişiklikler meydana geldiğini söylemiştir. Öğrencilerin geometri öğrenmeleri hakkındaki araştırmalar yapıldığını, K-12 sınıf seviyelerinde standartlara uygun geometri müfredatının hazırlandığını dile getirmiştir. Etkileşimli geometri yazılımlarının gelişip yaygınlaşması ise en büyük gelişim olarak görülmüştür. Kitaptaki dokuz makalenin etkileşimli geometri yazılımları ile geometri öğrenme ve öğretme ile ilgili olması bu değişimin yansıması olarak algılanmış ve yirminci yüzyılın başında güçsüzleşen geometrinin bu gelişmelerle beraber tekrardan bir araştırma alanı olarak ortaya çıktığı belirtilmiştir. Bu gelişmelere rağmen, matematik eğitimi topluluğunun hâlâ “okul

¹Arş. Gör., Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, seydamatbirni@gmail.com

²Yrd. Doç. Dr., Giresun Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, zekeriya@bilelim.net

geometrisinde neler olması?" gerektiği hakkında tartışmaya ihtiyacı olduğunu ve bu kitaptaki makalelerin bu tartışmaya katkı sunmasının ümit edildiğini vurgulamıştır.

Kitabı inceleyenler, bu eserin ilkökul seviyesinden üniversite seviyesine kadar geometri eğitiminde, önemli bir yeri olduğuna inanmaktadırlar. Kitabın ilk bölümünde, geleneksel müfredatın parçası olmayan ve geometride yeni olan başlıklar üzerinde durulması, günümüz geometrisinde nelerin çalışıldığını bizlere gösterilmesinin yanında, onları keşfetmeye teşvik etmesi, bu çalışmanın önemini gösteren özelliklerinden biridir. İkinci kısımda, geometri öğrenme ile ilgili çalışmalar sunulurken üçüncü kısımda da geometri öğretimi ile yapılan çalışmalara yer veriliyor. Her iki bölümün ortak özelliği ise öğrencilerin düşünmesini sağlayarak onlara açınınsa yapmaya fırsat verip kendi geometri bilgilerini, kendilerinin keşfedeceği ortamlar ve etkinlikler sunmalarıdır.

Bölüm 1:Geometrinin Genişleyen Vizyonu

Makalenin ilk kısmında günlük hayatla ilişkili, tek bir cevabı olmayan ve genelleme yapmaya fırsat veren altı farklı geometri problemi verilmiş. Daha sonraki kısımda geometri kelimesinin anlamının niçin genişlediği, uzaklık kavramında meydana gelen değişim örnek gösterilerek ifade edilmiş. İki nokta arasındaki uzaklığın Pisagor Teoremi ile bulunduğu, yazım denetim programlarının da yazılan bir sözcüğe yakın başka bir sözcüğü kullanıcılarına sunarken kelimler arasında uzaklıkları hesapladığı ifade edilmiştir. Sonuç kısmında ise geometrinin; önceden matematiğin şekiller ve uzay üzerine çalışan dalı olarak tanımlanırken şimdilerde ise görsel fenomenleri inceleyen matematik dalı olarak tanımlandığı ve geometricilerin hala yeni sorular sorup veya cevaplanmamış sorulara cevap arayarak çalışmalarına devam ettikleri vurgulanmıştır.

Bölüm 2: Dikdörtgenlerin ve Kaplamaların Simetri Sayıları

Herhangi bir dikdörtgenin 3 tane simetrisinin olduğu; bunlarında yatay simetri, dikey simetri ve yarım dönme (180°) olduğu belirtilmiş. Tasarlanmış dikdörtgenlerin beş çeşit olacağı; bunların asimetric, yatay simetric, dikey simetric, yarım dönme simetrisi ve her üç simetrisi olan tasarımlar olacağı görsel olarak gösterilerek anlatılmış. Dahası tasarlanmış dikdörtgenlerin herhangi iki simetrisi olanların diğer simetrisinin olduğu sonucu çıkarılmış ve bu sonuç ispatlanmıştır. Yazar öteleme, yansıma ve dönmenin bilindiğine, kaydırma simetrisinin pek fazla bilinmediğine değinmiş ve kaydırma simetrisini görsel örnekler ile açıklamıştır. Kaplama örüntülerinin yalnızca yarım dönme, simetri, öteleme ve kaydırma simetrisinin mümkün olacağı tartışılmış. Daha sonra periyodik kaplama örüntülerinin kaç tane simetrisinin olduğu bulunmuş. Kaplama örüntüleri simetri tiplerine göre sınıflandırıldığında periyodik olmayanların beş, periyodik olanların ise yedi çeşit olduğu ifade edilmiştir.

Bölüm 3:Möbius kavramları: Şerit ve Tori

Çalışmanın başında NCTM'in geometri standartlarında K-12 seviyelerindeki öğrencilerin iki ve üç boyutlu nesnelerin analizlerini yapabilmeleri ve geometrik ilişkiler hakkında tartışabilmelerinin gerekliliğinden bahsedilmiştir. Bu çalışmada möbius şeritleri

ve torilerinin ilkokul, ortaokul ve lise öğrencilerinin açınmalarına fırsat verecek şekilde nasıl sunulacağı anlatılmıştır.

Birinci kısım

Öğrencilerden dikdörtgen şeklindeki şeridin uç noktalarını birleştirmeleri, daha sonra şeridi $\frac{1}{2}$ büküm yapıp birleştirmeleri ve 5-6 tane şeridi her seferinde büküm sayısını öncekinden bir artırarak uçlarını birleştirmeleri istenmiştir. İlk olarak ellerindeki şeritlerin her bir yüzünü farklı renge boyamaları ve daha sonra buradaki örüntüyü keşfetmeleri istenmiştir. İkinci olarak oluşturulmuş şeritleri uzunlukları boyunca kesmeleri ve oluşan sonuçları karşılaştırarak açınmada bulunmaları istenmiştir. Son kısımda ise şeritleri $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{4}$ genişliğinde kesildiğinde oluşacak olan örüntüyü bulmaları istenmiştir.

İkinci kısım

Bu kısımda çok yüzlü prizmaların $1/n$ (n prizmanın kenar sayısı) miktarda bükülüp uçlarının birleştirilmesi sonucu oluşan şekiller olan toriler incelenmiştir. Öncelikle prizmanın yüz sayısı n , döndürme sayısı k ile gösterildiğinde öğrencilerden n ile k arasındaki asal sayılar, modüler aritmetik, bölme teorisi gibi ilişkileri fark etmeleri, ikinci aşamada (n, k) Mobius şeridinin başlangıç noktasına dönmesi için döndürme sayısı ile ilgili formülü bulmaları, son aşamada ise (n, k) Mobius şeridinin başlangıç noktasına dönmesi için döndürme sayısı ile ilgili formülü bulmaları istenmiştir. .

Bölüm 4: Kâğıt Modelleri ile Eğrileri Açınama (Keşfetme)

Bu çalışmada İseri eğik düzlemlerin incelenmesinin ileri düzey ve çok değişkenli analiz gerektirmesine rağmen altında yatan kavramların temel düzlem geometrisi ile de keşfedilebileceğini ortaya koymuştur. Daha sonra eğrilik kavramını *yön değişim miktarı / uzaklık değişim miktarı* olarak açıklamıştır. Çokgensel eğrilerde ve çemberlerde toplam dönme miktarının 2π olduğunu, aradaki farkın çokgensel eğrilerde dönmelerin ani olması olarak açıklamıştır. Gauss eğriliğinin Öklid düzleminde 0, hiperbolik düzlemde -1 ve eliptik düzlemlerde ise $+1$ olduğunu belirtmiştir. Sonrasında herhangi bir çokyüzlünün dış açılarının toplamının 4π olduğu Euler formülü kullanılarak ispat etmiş, üçgenlerin iç açıları toplamının her düzlemde aynı olmadığı ve üçgenin iç açıları toplamının $\pi +$ üçgende toplam eğrilige eşit olduğunu göstermiştir. En son kısımda ise kâğıt modelleri yardımı ile Öklid ve Öklid dışı geometrilerin özelliklerinin keşfedilmesine yönelik örnekler vermiş, bu tür örneklerle geometrinin keşfedilebileceği ve daha da derin anlaşılacağı ifade edilmiştir.

Bölüm 5: Çayır Bitkileri; Doğadaki Fraktal Formların Açınması (Keşfi)

Camp ve Hauenstein, fraktal geometrinin doğadaki şekilleri keşfetme imkânı verdiğini, doğadaki örnekleri göstermekle kalmayıp geometrik ilişkileri anlamaya olanak sağladığını belirtiyorlar. Bu çalışmanın ilk bölümünde gerçek bitkisel yapıların geometrik dönüşümler(matrisler) kullanılarak nasıl gösterildiği, ikinci bölümde ise işlemleri formülize etme ve teknoloji(matris özellikli hesap makineleri) kullanılarak, tekrarları fonksiyon sistemleri ile benzer diyagramların nasıl elde edileceği anlatılmaktadır.

Şekillere bakıldığında genellenenin nasıl yapılacağı ve genelleme yapmak için çok az bilginin gerektiği belirtilmiştir. Öğrencilere basit tekrarlı uygulamaların gösteriminin onlara ve bize önemli şeyler öğrettiği, öğrenenlere geniş deneyimler kazandırdığı, geometrik kavramların anlamlı keşfine ve ilişkilendirilmesine aktif olarak katılma imkânı verdiği söylenmiştir. Bu tür etkinliklerin yapılmasının öğrenmeyi ve öğretmeyi heyecanlı tutacağı da ifade edilmiştir.

Bölüm 6: Konveks Çok Yüzlü Elde Etmek İçin Çokgenleri Katlama

O'Rourke bu araştırmanın temel sorusunun "Konveks çok yüzlü elde etmek için hangi çokgenler katlanılmalı?" olduğunu belirtmiş ve katlamayı üst üste getirmeden ve arada boşluk kalmayacak şekilde çokgeni bükerek çok yüzlü elde etme olarak tanımlamıştır. Bir çokgenin katlanarak konveks çok yüzlü oluşturması için bir köşenin etrafındaki çokgenlerin iç açılarının toplamının 360° den küçük olması gerektiğini açıklamıştır. Bazı özel durumlar haricinde hangi çokgen katlanabilir hangisi katlanılmaz diye bir genellenenin yapılamayacağı fakat bir çokgenin kenar sayısı arttıkça katlana bilirliliğinin sifıra yaklaştığını belirtmiş. Bu çalışmaya yön veren "Alexandrov" teoremi açıklanmış ve her konveks çokgenin sonsuz sayıda, eş olmayan konveks çok yüzlüye katlanacağını Alexandrov teoremini kullanarak ispatlanmıştır. "Her çokgen katlanarak çok yüzlü oluşturulabilir mi?" sorusuna kısıtlı bir cevap verilmiş olsa da hala çözülmediğini ifade etmiştir. Bu soruya hayır cevabı veriliyorsa baştaki soruyu " Hangi çokgenler çok yüzlü elde etmek için katlanılabilir?" diye değiştirmek gerektiğini vurgulamıştır.

GEOMETRİ ÖĞRENME

Bölüm 7: Okul Geometrisini Öğrenme Üzerine Yapılan Araştırmaların Önemi

Yazar ilk kısımda geometri öğrenimini anlamak için 4 tane teoriden bahsetmiş. İlk olarak, Van Hiele'nin Clemants ve Batista tarafından detaylandırılan beş seviyesini teker teker açıklamıştır. İkinci teoride soyutlamadan bahsetmiştir. Üçüncü teoride ise kavram öğrenme üzerinde durmuş. Öğrencilerin zihinlerindeki kavramlar ile kavram tanımlarının birbirinden farklı olabileceği, bunun sebebinin de kavramların okul öncesi dönemde, kavram tanımlarının ise şekillerin özelliklerinden faydalanılarak okul döneminde oluşturulması olarak açıklamıştır. Bunlara ek olarak kavram öğrenmenin soyutlama ile ilişkisi açığı kavramı üzerinden örnekler vererek açıklamıştır. Son teoride ise yazar şemalar ve gösterimler üzerinde durmuştur.

İkinci kısımda geometri öğrenimi ve öğretimi ile ilgili yapılan çalışmalardan örnekler verilmiştir. Amerikalı öğrencilerinin geometrik kavramları anlamada, geometrik ispat yapmada, problem çözmeye ve muhakemeye zayıf olduklarından ve müfredatın öğrencilerin geometrik düşüncelerini ilerletecek sistematik bir destek sağlamadığından bahsedilmiştir. Öğrencilerin liseye girmeden önce Van Hiele 2. Seviyeye ulaşmış hatta 3.ye geçmiş olmaları gerektiği vurgulanmıştır. Etkileşimli Geometri yazılımlarının geometri öğrenimini geliştirecek potansiyele sahip olduklarından, bu yazılımların ilköğretim öğrencilerinin sorgulama yapmalarına imkân verdiğinden, kavramların, geometrik nesnelerin anlamlı öğrenilmesine ve genellemeler yapılmasına fırsat

verdiğinden bahsedilmiştir. Öğretmenlerin uygun rehberliğinin ve uygun formatta hazırlanan etkinliklerin ilköğretim öğrencilerinin Van Hiele'nin 1. seviyesinden 2. ve 3. Seviyelere çıkmasını sağlayabileceği örnekler ile açıklanmıştır. Ülkelerin çoğunda matematiksel kanıt öğretiminin başarısızlıkla sonuçlandığını ve Batista ve Clements'in³ (1995) kanıtın matematikçiler için önemli olduğunu çünkü onlara matematiksel düşünmenin geçerliliğini gösterdiğini fakat öğrenciler için kanıtın geçerliliği göstermediğini bunun yerine kişisel matematik aktiviteleri ile alakasız olan resmi kurallar kümesi olarak görüldüğü belirtilmiştir.

Öğrencilerin geometrik ispatlarda fazla zorlanmalarının sebepleri; ispatlara ihtiyacın az olması, ispatların soyut olduğu için öğrenilmesinin zor olduğu, yararlı olmadığı düşünülmesi ve öğrenmek için yeteri gayret gösterilmemesi olarak sıralanmıştır. Bunlara rağmen etkileşimli geometri yazılımlarının geometrik ispat yapmak için öğrencileri cesaretlendirdiği ve desteklediği vurgulanmıştır.

Bölüm 8: Prototipler ve Kategorik Sorgulama

Yazar çalışmanın ilk bölümünde herhangi bir kategorideki bir çizimin diğer çizimlere göre o kategoriyi daha iyi örneklendirildiğini düşünerek çizilen şeklin prototip olduğunu örnekle açıklamıştır. Etkileşimli geometri yazılımlarını kullanmanın kâğıt kalem ortamında gösterimi imkânsız olan görselleştirmeye, hareket ettirmeye ve geometrik nesnelerin tartışılmasına izin verdiği belirtilmiştir. Dörtgenlerin tanımlarını vermeden etkileşimli yazılımlar kullanılarak tasarlanmış deltoid ve yamuk etkinlikleri verilmiş ve daha sonra bütün sınıfın katıldığı tartışma ortamları oluşturmuştur. Yazar, öğrencilerin yazılımlar ve tartışmalarla deltoidin özelliklerini açsındıklarını ve kendi tanımlarını oluşturduklarını, öğrencilerin diyaloglarından örnekler vererek göstermiştir. Böylece öğrencilerin dörtgenlerin özelliklerine göre uygun prototipler geliştirdikleri ifade edilmiştir.

Bölüm 9: Açının Kavramları: Ortaokul Matematiği ve Ötesindekiler İçin Uygulamalar

Makalenin başında ilk ve ortaokul öğrencilerinin 2 ve 3 boyutlu nesnelerin analizlerini yapılabilmeleri için açının iyi bilinmesi gerektiği ifade edilmiş ve öğretmen adaylarının açığı yeteri kadar anlayamadıkları yapılan bir çalışma örneği ile gösterilmiştir. Açının karmaşık bir düşünce olduğu ve öğretmen adaylarının açı kavramında sınırlılıkları olduğu ifade edilmiş. Öğretmen adaylarına açı kavramını genişletmek için açının çoklu gösterimini içeren aktivitelerle bir ders planı hazırlanıp uygulanmış. Öğretmen adaylarına uygulanan ön test ve son test sonuçları ortaya konmuş ve açı kavramını ve ölçü birimini tanımlamakta, aynı zamanda çoklu gösterimde olumlu gelişmeler gösterdikleri belirtilmiştir. Açı kavramının tam anlaşılmasının nedenleri ortaya konmuş ve güçlü bir geometri bilgisi için bu aktivitelerin daha erken dönemde uygulanması tavsiye edilmiştir.

³Battista, M.T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54

Bölüm 10: Ahşap Küpler ve Dinamik Geometri Yazılımları Kullanarak Erken Sınıflardaki Öğrencilerin Uzamsal İşlem Kapasitelerini Geliştirmek

Çalışmanın ilk kısmında yazarlar uzamsal işlem yeteneklerin öneminden ve hangi tür modellerle geliştirileceğinden bahsetmişler. Bu modelleri kullanacak şekilde öğrenme aktiviteleri tasarlamışlar ve öncelikle öğrencilere tanımlayıcı ve uyum aktiviteleri sunmuşlar. Daha sonra sözel tanımlayıcı etkinlikte öğrencilerden birim küplerden oluşmuş yapıyı küpleri görmeyen arkadaşına anlatmaları istenmiş ve öğrencilerin bu etkinlikte bütüncül tanımlamadan analitik tanımlamaya geçtikleri belirtilmiştir. 2 boyuttan 3 boyuta ve 3 boyuttan 2 boyuta geçiş etkinlikleri yapılmış. Bunlara ek olarak Geocadabra yazılımı kullanılarak 3 boyutlu inşa etkinlikleri yapılmış istenmiş. Bu etkinliklerin 8-12 yaş seviyesindeki öğrencilerin uzamsal düşünme becerilerini 20 yaş seviyesinin ötesine taşımada yardımcı olduğu vurgulanmıştır.

Bölüm 11: Ortaokul Seviyesinde Geometrik Düşünmeyi İlerletme; Öğretmenler için Mesleki Gelişim

Yazarlar geometrik ve cebirsel düşünmenin her ikisinin de önemli olduğunu her iki düşüncenin de geliştirilmesi gerektiğini belirterek başlamışlar. Daha sonra bir soru sorulmuş ve bu soruya verilen üç ayrı cevap geometrik düşünme açısından incelenmiş. Orta sınıflarda geometrik düşünmeyi ilerletmek için ilk kısımda beş basamaktan oluşan yapılandırılmış keşfetme süreci anlatılmış. İkinci kısımda zihnin matematiksel alışkanlıklarının ne anlama geldiği açıklanmış, bunların geometrik düşünmeye etkilerinden bahsedilmiş. Zihnin geometrik alışkanlıklarından dört tanesi (ilişkileri sorgulama, genelleme, değişken olmayanların keşfi ve keşfetme ve yansımayı dengeleme) ele alınmış. Daha sonra bu alışkanlıkların her biri detaylı olarak açıklanmıştır. Geometrik düşünmeyi geliştirecek materyal geliştirmede problemlerin zihnin geometrik alışkanlıklarını kullanabilmesi gerektiği vurgulanmış ve örnek verilmiştir. Öğretmenlerin geometri bilgilerinin ve öğretilerindeki etkinin keşfedilmesinin geometrik düşünmenin gelişmesinde önemli olduğu çünkü öğretmenin geometrik düşünmesindeki yansımaların öğrencilerin problem çözmelerindeki düşüncelerini daha kolay anlamalarını sağladığı belirtilmiştir. Ayrıca geometrik düşünmenin cebirsel düşünmeyi tamamlayacağını düşündükleri ifade edilmiştir.

Bölüm:12: Kavramsal Öğrenme için Geometri Öğretimi: Bir Öğretmenin Bakış Açısından

Yazar, açınsayarak anlamlı öğrenmede öğretmen ve öğrencinin rolünü belirlemek ve vurgulamak için sorular sorarak başlamış. NCTM'in öğrenme ve öğretme ilkelerini açıklamış ve kavramsal anlamının zorlu bir öğrenme ortamında öğretilmesi gereği sonucunu çıkarmıştır. TIMSS videolarına bakıldığında Japonların dersin yarısına yakın bir kısmını düşünme ve keşfetmeye ayırdıklarını, Amerikanların ise %1 in altında bir zaman ayırdıklarını ifade etmiş. Öğretmenlik yaptığı için öğrencilerin spor etkinliklerinde onlara koçluk yaptığını ve ilk kural olarak hayatta kalabilmeleri için aktif olmaları gerektiğini söylediğini ifade etmiş ve başta çok az şey bilmelerine rağmen yaparak yaşayarak hatta yanlılar yaparak öğrendiklerini belirtmiştir. Buradaki deneyimlerinden yola çıkarak

matematiği keşfetme tabanlı öğretmek gerektiğine karar vermiştir. Öğretmen ve öğrencilerin katılımlarına göre keşfetme tabanlı öğrenme için üç formattan bahsetmiş ve keşif tabanlı üç ders örneği sunmuştur. Keşfetme tabanlı ders hazırlamada öğrencilerin zorlu ortamlarda keşiflerde bulunmaları gerektiği ifade edildikten sonra zorluk derecesinin nasıl olması gerektiği sebepleri ile açıklanmış. Öğretmenin ders sürecinin dörtte birinden daha az bir kısımda aktif olması gerektiği vurgulanmış. Son kısımda ise başta sormuş olduğu soruların her birine teker teker cevap vermiştir.

Bölüm 13: Geometride Tanımlama

Villiers, Govender ve Patterson öncelikle tanımların matematikte ilişki kurmak ve yeni bilgiler inşa etmedeki önemini anlatmışlar. Tanımların öğrencilere var olan bilgileri geliştirmelerine fırsat vermeden verildiğini ve anlamsızca ezberletildiğini vurgulamışlar. Öğrencilere kitaplardaki yapılandırılmış tanımların verilmesinin; her bir nesnenin tek bir doğru tanımı olduğu düşüncesine sevk ettiğini ve özgürlüklerinin kısıtlanmış olduğunu ifade etmişlerdir. Dahası bu yaklaşımın öğrencilerin matematiğin tanımlamalar ile başladığı, tanımların bir buluş olduğu ve keşfedilemeyeceği gibi kavram yanlışları geliştirmelerine yardım ettiği anlatılmış. Bunları önlemek, kendi tanımlarını oluşturmaları ve kritik etmeleri için yediden yapılandırmacı yaklaşım ile tanımların ve konuların öğretilmesi gerektiği ifade edilmiş. Daha sonra tanımlama türlerinden (ayırıcı ve hiyerarşik) bahsedilmiş ve hangi durumlarda hangisini kullanmanın uygun olacağı açıklanmış. Doğru tanımlama için gerekli ve yeterli şartların olması gerektiği ve gerekli ve yeterli şartların neler oldukları örnek ile anlatılmış. Son olarak tanımlama türlerinden ekonomik tanımlama açıklanmış. Öğrencilerin özellikleri görekerek öğrenmediklerini, kavramın çok farklı örneklerini görekerek öğrendikleri belirtilmiş ve üç aşamadan oluşan öğretim sırası sunulmuştur. 1. aşama etkileşimli geometri yazılımlarını kullanarak şekli oynatarak, ölçerek özelliklerinin fark edilmesi, 2. aşama doğru ve sade bir tanım yapmaya zorlama 3. aşama ise özellikleri sistematikleştirme. Sonuç kısmında deneyimlerle tahminde bulunabilmeleri, tanımları kendilerinin oluşturabilmeleri ve özellikleri anlamaları için etkileşimli geometri yazılımları ile öğrencilere tanım oluşturma sürecine katılma şansı verilmesi gerektiği ifade edilmiştir.

Bölüm 14: İlkokul Öğrencilerinin Dörtgenleri İleri Düzeyde Anlaması

Van Hiele'ye göre geometrik düşünme seviyelerinin ilerlemesinin eğitim sürecindeki deneyimlere bağlı olduğundan bahsedilmiş. Bundan dolayı Casa ve Gavin, öğrencilerin ilkokul matematik sınıfında ki deneyimlerinin şekilleri anlamaları ve geometrik düşünme seviyelerini ileri seviyelere taşımaları için önemli olduğunu vurgulamışlardır. Kavramsal anlamalarını ilerletmek için öğrencilerin kavramların adını öğrenmeden önce kavramların özelliklerini keşfedecekleri etkinliklere katılmalarının teşvik edilmesi gerektiği belirtilmiş. Daha sonra öğrencilerin şekillerin adını kavramalarına yardım etmek için gerçek yaşam senaryoları sunmak gerektiği örnekle açıklanmıştır. Dörtgenlerin aralarındaki ilişkileri sorgulayarak keşfedecekleri birkaç etkinlik örneği verilmiş ve bu yöntemlerle kavramsal öğrenmeyi gerçekleştiren öğrencilerin informal bir dil kullandıkları, öğretmenlerin öğrencilerin kullandıkları günlük dille daha formal bir dil arasında bağlantı kurmalarına

yardım edecek uygulamalar yapmaları gerektiği belirtilmiş. Öğrencilerin çoklu gösterimler kullanarak tanımlarını kendilerinin oluşturmaları gerektiği ifade edilmiş. Öğrencilerin matematiksel bir dil kullanmanın ihtiyacını hissetmelerini sağlayacak birkaç uygulama ve uygun matematiksel dili kullanmalarına yardımcı olacak bir örnek verilmiş. Matematiksel sözcük dağarcıklarının gelişmesi için öğrencilerin teşvik edilmesi gerektiği belirtilmiş ve bu gelişime yardımcı olacak örnek bir aktivite sunulmuş. Kavram ve dil gelişiminin öğrencileri görsel algılamadan alıp aradaki ilişkileri fark ederek sınıflandırmaya yönlendirdiği vurgulanmıştır.

Bölüm 15: Etkileşimli Geometri Yazılımları ile Ortaokul Geometrisinin Öğretilmesi

Birçok araştırmacının dinamik geometri yazılımları ile öğrenme ve öğretmede “çizmek, inşa etmek, diyagram ve şekil” kelimeleri arasındaki ince ayrımları keşfettiği ifade edilmiştir. “Çizmek” kelimesi sadece görsel algılara bağlı kalınarak yapılan işlem olarak tanımlanırken, “inşa etmek” şeklin özelliklerini sorgulayarak ve bu özelliklere dikkat edilerek yapılan işlem olarak tanımlanmış. Öğrenci şekle baktığında özelliklerine de bakıyorsa şekil; öğrenci geometrik şeklin özelliklerini veya algısal özelliklerini kullanıyorsa diyagram olarak adlandırılmış. İnşa etme etkinliklerinin geometrik nesnelerin görünüşlerindeki özelliklerinden ziyade teorik düşünmeye sevk ettiği ifade edilmiş. Etkileşimli geometri yazılımları ile çizme ve inşa etme sürecinde kullanılan yöntemler (reaktif ve proaktif) açıklanmış ve öneminden bahsedilmiş. Daha sonra sorgulama için üç tane kanıt şemasının neler olduğu(Dış görünüş kanıt şeması, deneysel kanıt şeması ve analitik kanıt şeması) örnekler ile açıklanmıştır. Etkileşimli geometri yazılımlarının kullanıldığı çalışmalarda lise öğrencilerinin öncelikle dış görünüş kanıt şemalarını kullandıkları daha sonraları ise deneysel kanıtı kullanmaya başladıkları ifade edilmiş. Bunun sebebinin öğrencilerin deneysel kanıtı yeterli olarak görmelerinin olduğu vurgulanmış. Öğretmenlere öğrencilerin ispatın önemini ve rolünü anlayacakları etkinlikler tasarlamaları gerektiği ifade edilmiş ve iki öneride bulunulmuştur. Bu öneriler; öğrencilere inşa ettikleri etkinliklerin neden doğru olduklarını açıklamaları ve öğrencilere beklemedikleri sonuçlar üretecekleri dolayısı ile bilişsel çatışma yaşayacakları etkinlikler verilmesi ile öğrencilerin merakının artırılması ve daha sonra bu durumun nedenlerini açıklanmasının istenilmesidir. Formal kanıt yapmak için öncelikle öğrencilerin örüntüleri keşfettikleri, tahminde buldukları, örnekleri kontrol ettikleri etkileşimli geometri yazılımları ile oluşturulan etkinliklere katılmaları gerektiği, daha sonra ise öğretmenlerin teknolojinin sunmuş oldukları özellikleri öğrencilerin ispatın kesinliğini bulmaya yönlendirmesi gerektiği vurgulanmış. Sonuç kısmında, öğrencilerin soyut geometriyi algılamalarını ve tümdengelimli sorgulamalarını geliştirmek için etkileşimli geometri yazılımlarının kullanıldığı ve kullanılması gerektiği ifade edilmiştir.

Bölüm 16: Problemlerin Etkileşimli Geometri Ortamlarında Gösterimi, Modellenmesi ve Çözümü

Yazarlar problem çözenin matematik eğitimi için temel olduğunu ve karmaşık bir işlem olduğunu belirtmişler. Etkileşimli geometri yazılımlarının geometrik şekillerin

inşasını kolaylaştırdığı, şekilleri hareket ettirme özelliklerinin tahminlerde bulunma ve keşfetme imkânları vermesinin problem çözme geliştireceği anlatılmıştır. İki kısımdan oluşan makalenin ilk kısmında etkileşimli geometri öğrenme ortamlarında öğretmenler ve öğretmen adaylarının çözmüş oldukları altı tane problem çözme etkinliği verilmiş. İkinci kısımda öğrencilerin etkileşimli geometri ortamlarında problem çözme süreçlerinin gözlemlenmesi sonucu elde edilen verilerden bahsedilmiş. Bu veriler: öğrencilerin sözlü ifadeyi gösterime çevirdikleri, problemi modellemek için kendi bilgilerini kullandıkları, problemlerle ilgili tahminlerde bulunup daha sonra bu tahminleri doğrulamaya çalıştıkları, karmaşık problemleri çözmeye motivasyonlarının arttığı, mümkün olan çözüm yollarının keşfedilebildiğidir. Sonuç kısmında bu ortamların öğrencileri ezber ve formülleri uygulamanın ötesine taşıdığı, problemleri anlama ve çizme imkânı verdiği vurgulanmıştır. Öğretmenlere ve programı hazırlayanlara, öğrencilerin problemlerin cevaplarını bu yazılımları kullanarak bulacakları problemler bulmaları veya geliştirmeleri önerilerinde bulunulmuştur.

Bölüm 17: Geometri Teoremi Keşfetme

Yazarlar problemin matematikteki önemini anlatarak makaleye giriş yapmışlar. Problem üretmeyi, var olan problemi tekrardan formüle etme, yeni problemler ortaya koyma süreci olarak tanımlamışlar. Problem üretmenin zor bir aktivite olduğunu, bunun için sistematik ve yararlı bazı stratejiler bilinmesi gerektiğini ifade etmişler ve bu stratejileri örnek üzerinde açıklamışlar. Geometride problem çözebilmek, şekilleri inşa etmek ve tahminlerde bulunabilmek için etkileşimli geometri yazılımlarının kullanılması gerektiği sebepleri ile açıklanmıştır. Öğrencilere öncelikle bu yazılımların tüm komutlarının gösterildiği ifade edilmiş ve derste yapılan bir etkinlik anlatılmış. Problem çözme ile problem üretme arasındaki ilişki derste yapılan örneklerle açıklanmıştır. Dersin ilk günü öğrencilere final projesi olarak yeni bir teorem (sınıfta yapılmamış, herhangi bir kitaptan alınmamış, arkadaşlarından duyulmamış) keşfetmeleri gerektiği, bu çalışma sırasında yaptıkları tahminleri, bulguları raporda açıklamaları gerektiği belirtilmiştir. Öğrencilerin korkmamaları gerektiği ders sürecinde bu tür aktiviteler yapılacağı söylenmiştir. Dönem sonunda öğrenciler bu proje ile sınıf içinde yapmış oldukları çalışmalarını yazılım sayesinde daha da genişletme imkânı bulduklarını bildirmişler.

Bölüm 18: Öğrenciler Tarafından Keşfedilen Teoremler

Dinamik geometri yazılımlarının geometriyi öğrenme ve öğretme yöntemlerinde ciddi değişiklikler yaptığı ifade edilmiştir. Öğrencilerin bu yazılımlar ile çabuk ve rahat öğrenmeyi gerçekleştirdikleri, tahminler yapıp bu tahminleri kanıtlamaya istekli oldukları açıklanmıştır. Literatürde bu programların öğrencilerin matematiksel keşiflerini arttırdığı, bu durumu sağlamak ve öğrenciyi zorlamak için öğretmenin kendisine sorması gereken sorulardan bahsedilmiştir. Daha sonra öğrencilerin yapmış oldukları geometrik keşiflerden altı tane örnek sunulmuştur. Bu tür etkinliklerin yapılabilmesi için öğretmenlerin neleri, nasıl yapması gerektiği belirtilmiştir. Öğretmenlerin işlemiş oldukları derse sorgulama tabanlı bakmaları gerektiğinin önemi anlatıldıktan sonra nasıl yapılacağı bir örnekle açıklanmıştır.

Bölüm 19: Kareler ve Çemberlerin Kesişimini Kullanarak Öğrencileri Geometri Yapmaya Teşvik Etme

Blair ve Canada, geometrinin öğrencilere bitmiş bir ürün olarak sunulduğunu ve öğrencilerin geometriyi matematiğin bir dalı olarak öğrendiklerini belirtmişlerdir. Aslında geometriyi bir düşünme yolu olarak öğrenmek gerektiği ve gerçek anlamda geometri yapabilmek için zihinsel geometrik alışkanlıklar geliştirip kullanmak gerektiğini vurgulamışlardır. Bunun içinde öğrencilerin açık uçlu soruları cevaplandırmaya teşvik edilmeleri, matematiksel nesnelere tanımlamaları ve bu nesnelere özelliklerini keşfetmelerine imkân verilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu makalede bu etkinliğin öğrencileri geometri yapmaya sevk edecek şekilde nasıl kullanılması gerektiği üzerine odaklanılmış. İlk soru olarak “Bir çember ve bir karenin kaç tane kesişim noktası olabilir?” sorusu sorulmuş. Bu soru ile öğrencilerin açınmaya başlayacakları, kendilerini etkinliğin sahibi ve geometrici olarak görebilecekleri belirtilmiş. “ Hangi farklı durumlarda çember ve kare kesişir?” sorusuna yanıt ararken tanımlama ve sınıflandırma yapımları gerekeceği, “Sınıflandırmalarda hangi ilişkileri fark ettin?” sorusuna buldukları cevapların doğruluğunu ispatlayabilecekleri, son soru olan “verilen bir şekli nasıl yapılandırırın?”a cevap ararken öğrencilerin yapılandırma ile ispat arasındaki boşluğu doldurup, yapılandırma ile ispat yapabilecekleri ifade edilmiştir. Yazarlar, bu etkinliğin; öğrencilerin geometri yapma sürecine katılmaları için zengin bir kaynak olduğunu ve daha da önemlisi daha zengin etkinlikler üretmelerine yardım edeceğini belirtiyorlar. Bu etkinliğin öğrencilere özel bir konuyu ve teoremi göstermek için tasarlanmadığını; öğrencilere tanımlamada, sınıflandırmada, yapılandırmada ve ispatlamada rehberlik etmek için tasarlandığını belirtmişlerdir.

Bölüm 20: Hareketli Şekillerle Alan Formülleri

Yazar, öğrencilerin çokgenlerin formüllerini birbirleri arasında ilişki kurmadan öğrendiklerini aynı zamanda alan formüllerini farklı formlarda cebirsel ifadeler şeklinde ifade edemediklerini belirtiyor. Bu problemleri giderebilmek için etkileşimli şekillerle öğretmen rehberliğinde yapılabilecek etkinlikler açıklanmış. Bu etkinliklerde bir çokgeni alanı bilinen başka çokgenlere çevirerek alanlar arasındaki ilişkiler gösterilmiş ve alan formülü farklı cebirsel formlarda gösterilmiştir. Bu etkinlikler ile formüllerin ilişkilendirildiği ve bir formülün diğerinden nasıl türetildiğinin öğrenciler tarafından keşfedilebileceği vurgulanmış. Bunlara ek olarak bu aktivitelerin cebirsel düşünmeyi geliştirmek için kullanılabileceği gerekçeleri ile anlatılmıştır.

Bölüm 21: Geometri Öğrenme ve Öğretmeye Entegre Yaklaşım

Yazar geometride entegre etme işleminin yeni bir şey olmadığını, entegrenin; geometri, cebir ve trigonometriyi bölüm ve konu ayrımı yapmadan kaynaştırmak olduğu belirtilmiştir. Phillips Exeter Akademide’ki matematik fakültesinin 2006’da yayımlanmış olduğu kitaptaki problemlerin entegre yaklaşımına uygun olduğunu belirtiyor ve bu kitaptan aldığı problemlerin çözümlerini yapan öğrencilerin; neleri, nasıl keşfedeceklerini açıklıyor. Bu problemleri kullanarak yapmış olduğu uygulamalarda öğrencilerin problem

çözme becerilerinde ve problem çözmeye kendilerine duydukları güvende meydana gelen olumlu etkilerden bahsediyor.

Bölüm 22: Geleneksel Geometri Dersini Keşfedici Aktivite Olarak Tekrardan Tasarlanması

Yazar, ders kitaplarında teoremlerin, ispatların direkt verilmesi ile öğrencilerin tahminde bulunmalarının ve keşfetmelerinin engellediğini belirtmiş. Kavramsal öğrenmenin gerçekleşebilmesi için öğrencilerin derse aktif olarak katılmaları gerektiği ama ders kitaplarının bunu engellediğini ayrıca öğrencinin uygun etkinlikler ile zorlanması gerektiği fakat kitaplarda öğrencilere çözüm yollarının gösterilmesinin öğrencinin çözüm sürecini kendisinin yaşayamadığı ifade edilmiş. Öğretmen adayları ile üçgenlerin iç açıları toplamı, dörtgenlerin iç açıları toplamı ve çokgenlerin iç açıları toplamı öğrencilerin sürece katılacakları, teoremlerin nedenlerini öğrenecekleri bir geometri dersi düşünülerek ve tartışılarak tekrardan tasarlanmış ve bu süreç makalede açıklanmıştır. Sonuç kısmında ise tekrardan tasarlanan dersin öğretmen adayları için bir öğrenme deneyimi olduğu vurgulanmıştır.

Bölüm 23: İleriye Dönük Etkileşimli Sembolik Geometri

Yazar etkileşimli geometri yazılımlarının yapılandırmacı tabanlı olduğunu, fakat bu programların sayısal olmalarından dolayı geometri ve cebir arasındaki önemli bağları güçlendirmekte sınırlı olduğunu belirtmiş. Bu kısıtlamalara değinen ve etkileşimli yazılım sistemleri ile bilgisayar cebir sistemlerini birleştiren sembolik geometri sisteminin potansiyeli hayal edilmiş ve verilen etkinlik örneklerinde bu sistem kullanılmıştır. Makalenin ilk kısmında sembolik geometri sisteminin verdiği cebirsel formülün elimizde farklı bir formda olan haline çevrilmesi, bir formül kullanarak başka bir değişkenin formülünün bulunması istenmiş. İkinci bölümde cebir ve geometriyi birleştiren iki ayrı problem verilmiş. Geometrinin cebirsel keşif problemleri üretme imkânı verdiği ifade edilmiş. Bunun yanında cebirsel ifadeler değiştirilerek geometrik teoremlerin ispat edilebileceği de vurgulanmıştır.

Kaynak: Craine, T.V., & Rubenstein, R. (Eds.). (2009). *Understanding geometry for a changing world*. Reston: NCTM's 71st Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics Yearbook).